KURIKULUM 2013
MATEMATIKA
Buku Guru
SMA/MA
Kelas
XII

Disklaimer: *Buku ini merupakan buku guru yang dipersiapkan Pemerintah dalam rangka implementasi Kurikulum 2013. Buku guru ini disusun dan ditelaah oleh berbagai pihak di bawah koordinasi Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, dan dipergunakan dalam tahap awal penerapan Kurikulum 2013. Buku ini merupakan "dokumen hidup" yang senantiasa diperbaiki, diperbaharui, dan dimutakhirkan sesuai dengan dinamika kebutuhan dan perubahan zaman. Masukan dari berbagai kalangan diharapkan dapat meningkatkan kualitas buku ini.*

Katalog Dalam Terbitan (KDT)

Indonesia. Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.
Matematika : buku guru / Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.--
Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, 2015.
viii, 336 hlm. : ilus. ; 25 cm.

Untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas XII
ISBN 978-602-282-026-0 (jilid lengkap)
ISBN 978-602-282-033-8 (jilid 3)

1. Matematika — Studi dan Pengajaran I. Judul
II. Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan

510

Kontributor Naskah : Abdur Rahman As'ari, Ipung Yuwono, Makbul Muksar, Tjang Daniel Chandra, Latifah Mustofa L., Latiful Anwar, Nur Atikah, Dahliatul Hasanah, Syaiful Hamzah Nasution, dan Vita Kusumasari.

Penelaah : Agung Lukito, Ali Mahmudi, Kusnandi, dan Turmudi.

Penyelia Penerbitan : Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemdikbud.

Cetakan Ke-1, 2015
Disusun dengan huruf Times New Roman, 11 pt.

Kata Pengantar

Matematika adalah bahasa universal untuk menyajikan gagasan atau pengetahuan secara formal dan presisi sehingga tidak memungkinkan terjadinya multi tafsir. Penyampaiannya adalah dengan membawa gagasan dan pengetahuan konkret ke bentuk abstrak melalui pendefinisian variabel dan parameter sesuai dengan yang ingin disajikan. Penyajian dalam bentuk abstrak melalui matematika akan mempermudah analisis dan evaluasi selanjutnya.

Permasalahan terkait gagasan dan pengetahuan yang disampaikan secara matematis akan dapat diselesaikan dengan prosedur formal matematika yang langkahnya sangat presisi dan tidak terbantahkan. Karenanyamatematika berperan sebagai alat komunikasi formal paling efisien. Perlu kemampuan berpikir kritis-kreatif untuk menggunakan matematika seperti uraian di atas: menentukan variabel dan parameter, mencari keterkaitan antarvariabel dan dengan parameter, membuat dan membuktikan rumusan matematika suatu gagasan, membuktikan kesetaraan antarbeberapa rumusan matematika, menyelesaikan model abstrak yang terbentuk, dan mengkonkretkan nilai abstrak yang diperoleh.

Buku *Matematika Kelas XII* untuk Pendidikan Menengah ini disusun dengan tujuan memberi pengalaman konkret-abstrak kepada siswa seperti uraian di atas. Pembelajaran matematika melalui buku ini akan membentuk kemampuan siswa dalam menyajikan gagasan dan pengetahuan konkret secara abstrak, menyelesaikan permasalahan abstrak yang terkait, dan berlatih berfikir rasional, kritis dan kreatif.

Sebagai bagian dari Kurikulum 2013 yang menekankan pentingnya keseimbangan kompetensi sikap, pengetahuan dan keterampilan, kemampuan matematika yang dituntut dibentuk melalui pembelajaran berkelanjutan yaitu dimulai dengan meningkatkan pengetahuan tentang metode-metode matematika, dilanjutkan dengan keterampilan menyajikan suatu permasalahan secara matematis dan menyelesaikannya, dan bermuara pada pembentukan sikap jujur, kritis, kreatif, teliti, dan taat aturan.

Buku ini menjabarkan usaha minimal yang harus dilakukan siswa untuk mencapai kompetensi yang diharapkan. Sesuai dengan pendekatan yang dipergunakan dalam Kurikulum 2013, siswa diberanikan untuk mencari dari sumber belajar lain yang tersedia dan terbentang luas di sekitarnya. Peran guru sangat penting untuk meningkatkan dan menyesuaikan daya serap siswa dengan ketersedian kegiatan pada buku ini. Guru dapat memperkayanya dengan kreasi dalam bentuk kegiatan-kegiatan lain yang sesuai dan relevan yang bersumber dari lingkungan sosial dan alam.

Sebagai edisi pertama, buku ini sangat terbuka terhadap masukan dan akan terus diperbaiki dan disempurnakan. Untuk itu, kami mengundang para pembaca untuk memberikan kritik, saran dan masukan guna perbaikan dan penyempurnaan edisi berikutnya. Atas kontribusi tersebut, kami ucapkan terima kasih. Mudah-mudahan kita dapat memberikan yang terbaik bagi kemajuan dunia pendidikan dalam rangka mempersiapkan generasi seratus tahun Indonesia Merdeka (2045).

Jakarta, Januari 2015

Menteri Pendidikan dan Kebudayaan

Daftar Isi

Tentang Buku Guru

Buku Siswa adalah buku yang diperuntukan bagi siswa yang dipergunakan sebagai panduan aktifitas pembelajaran untuk memudahkan siswa dalam menguasai kompetensi tertentu. Buku Siswa bukan sekedar bahan bacaan, tetapi juga digunakan untuk melaksanakan kegiatan-kegiatan dalam proses pembelajaran (activities based learning) isinya dirancang dan dilengkapi dengan contoh-contoh lembar kegiatan dengan tujuan agar dapat terselenggaranya pembelajaran kontekstual, artinya siswa dapat mempelajari sesuatu yang relevan dengan kehidupan yang dialaminya.

Buku Siswa disusun untuk memfasilitasi siswa mendapat pengalaman belajar yang bermakna. Isi sajian buku diarahkan agar siswa lebih aktif dalam mengikuti proses pembelajaran melalui kegiatan mengamati, menanya, mengumpulkan informasi, menalar/mengasosiasi, dan mengomunikasi. Melalui kegiatan-kegiatan tersebut diharapkan dapat menumbuhkan motivasi, rasa keiingintahuan, inisiatif, dan kreatifitas peserta didik.

Oleh karena itu, supaya buku siswa dapat secara optimal mampu menfasilitasi pengalaman belajar yang bermakna dan mencapai kompetensi yang diinginkan, perlu dilengkapi dengan buku panduan penggunaan bagi guru sebagai fasilitator yang memandu siswa memanfaatkan buku siswa tersebut, yang selanjutnya buku panduan tersebut disebut Buku Guru. Buku guru berisi tentang penjelasan atau intruksi-intruksi yang diberikan guru kepada siswa dalam menggunakan atau memahami buku siswa tiap-tiap halaman.

Petunjuk Penggunaan Buku Guru

Bila dilihat isi dan bentuknya, buku guru berisi tentang cuplikan atau gambar utuh tiap-tiap halaman dimana masing masing gambar tersebut di lengkapi: (1) penjelasan atau instruksi-instruksi yang diberikan guru kepada siswa dalam memahami petunjuk atau perintah atau pertanyaan di buku siswa (lihat gambar 1), (2) alternatif penyelesaian terkait contoh soal dan soal latihan pada tiap-tiap akhir subbab (lihat gambar 2), (3) soal-soal uji kompetensi tiap-tiap bab beserta alternatif penyelesaiannya atau petunjuk dalam penyelesaiannya (lihat gambar 3), (4) contoh penilaiaan dan instrument penilaian untuk tiap-tiap kompetensi yakni sikap, pengetahuan dan keterampilan (lihat gambar 4).

Ayo Menanya

Nah, berdasarkan informasi di atas, buatlah pertanyaan tentang sifat-sifat diagonal bidang dan diagonal ruang. Tuliskan pertanyaanmu di tempat berikut ini.

Ayo Menggali Informasi

Dari sekian banyak pertanyaan yang Anda buat, mungkin ada diantaranya pertanyaan-pertanyaan berikut:

1. Apa saja sifat diagonal bidang dan diagonal ruang pada kubus?
2. Apa saja sifat diagonal bidang dan diagonal ruang pada balok?
3. Apa saja sifat diagonal bidang dan diagonal ruang pada prisma?
4. Apa saja sifat diagonal bidang alas pada limas?

Ayo Menalar

Untuk dapat menjawab pertanyaan-pertanyaan di atas, telitilah bangun ruang-bangun ruang yang sudah Anda ketahui. Gambarkan bangun ruang yang Anda ketahui, tentukan ukuran bangun ruang tersebut, kemudian tentukan panjang semua diagonal bidang dan diagonal ruangnya (jika ada). Setelah itu buatlah kesimpulan mengenai sifat-sifat diagonal bidang dan diagonal ruang untuk tiap-tiap bangun ruang tersebut. Lakukan kegiatan-kegiatan tersebut pada tempat yang telah disediakan berikut ini.

Ayo Menanya

Minta siswa untuk membuat pertanyaan yang berkaitan dengan sifat-sifat diagonal bidang dan diagonal ruang.

Contoh:

1. Apa saja sifat-sifat diagonal bidang?
2. Apa saja sifat-sifat diagonal ruang?
3. Apakah sifat – sifat diagonal bidang dan diagonal ruang kubus sama dengan balok?

Ayo Menggali Informasi

Ajak siswa untuk menggali keingintahuan mereka tentang sifat-sifat diagonal bidang dan diagonal ruang untuk masing-masing jenis bangun ruang.

Ayo Menalar

Minta siswa untuk memikirkan bangun ruang yang mereka ketahui dan minta siswa untuk menggambarkan bangun ruang yang mereka pikirkan tersebut. Bimbing siswa untuk menentukan ukurannya, menentukan semua diagonal bidang dan diagonal ruangnya serta menentukan panjang masing-masing diagonal bidang dan diagonal ruang tersebut. Setelah itu bimbing siswa untuk membandingkan panjang diagonal bidang atau diagonal ruang yang terdapat pada bangun ruang yang sama. Secara pelan-pelan tuntun siswa untuk menemukan kesimpulan mengenai sifat-sifat diagonal bidang dan diagonal ruang pada bangun ruang yang mereka buat.

Kurikulum 2013 Matematika 25

Gambar 1

2. Perhatikan bangun berikut ini.

a. Pada Gambar 1, jika diketahui panjang $AB = BC = CG = 4$ cm, $JK = 3$ cm, dan $BJ = 1$ cm hitunglah panjang AC, AK, dan LG.

b. Pada Gambar 2, jika diketahui panjang $AB = 5$ cm, $AE = BC = EF = 4$ cm hitunglah panjang AC, EG, DF dan AG.

3. Perhatikan aquarium berikut ini.

Sumber: Big Ideas Math Advanced I

Pada aquarium tersebut akan ditambahi hiasan yang digantungkan pada kawat yang dipasang di dalam aquarium melintang dari ujung atas ke ujung bawah. Tentukan panjang kawat yang diperlukan!

Alternatif Penyelesaian **Latihan 4.1.1**

2. a. $AC = 4\sqrt{2}\ cm$
   $AK = \sqrt{26}\ cm$
   $LG = \sqrt{26}\ cm$

   b. $AC = \sqrt{41}\ cm$
   $EG = 4\sqrt{2}\ cm$
   $DF = AG = 4\sqrt{3}\ cm$

3. Panjang kawat = $\sqrt{58,25} \approx$ 7,63 ft

18 Buku Guru Kelas XII SMA/MA

Gambar 2

Uji Kompetensi 4

1. Diketahui kubus $ABCD.EFGH$ dengan panjang rusuk 6 cm. Tentukan semua diagonal bidang dan ruangnya serta panjangnya.
2. Diketahui limas dengan alas segienam beraturan sebagai berikut.

Jika diketahu panjang $BE = 16$ cm, maka tentukan luas permukaan dari limas tersebut.

3. Diketahui kubus $ABCD.EFGH$ dengan M dan N adalah perpotongan antara diagonal-diagonal bidang alas dan atas. Tentukan garis yang sejajar dengan MH.
4. Tentukan apakah pernyataan berikut benar atau salah.
   a. Prisma dengan alas segitiga mempunyai diagonal ruang.
   b. Tabung mempunyai diagonal bidang.
   c. Kubus mempunyai 4 bidang diagonal.
   d. Balok mempunyai 12 diagonal bidang yang panjangnya sama.
   e. Setiap limas tidak mempunyai diagonal ruang.

Kurikulum 2013 Matematika 39

Alternatif Penyelesaian Uji Kompetensi 4

1. Diagonal bidang: $AC, BD, EG, FH, AH, DE, BG, CF, AF, BE, DG, CH$.
   Panjang tiap-tiap diagonal bidang = $6\sqrt{2}$ cm
   Diagonal ruang: AG, CE, BH, DF.
   Panjang tiap-tiap diagonal ruang = $6\sqrt{3}$ cm
2. Dari alas limas yang berbentuk segienam beraturan dapat diketahui bahwa panjang rusuk segienam tersebut adalah 8 cm.

Segitiga yang terbentuk dari segienam tersebut merupakan segitiga sama sisi sehingga luas alas limas adalah 6 × luas salah satu segitiga sama sisi tersebut.

Diperoleh luas $ABCDEF = 96\sqrt{3}$ cm².

Luas $TCD = 52$ cm².

Sehingga luas permukaan $T.ABCDEF = 96\sqrt{3} + 312$ cm².

3. BN
4. a. Salah
   b. Salah
   c. Salah
   d. Salah
   e. Benar

Kurikulum 2013 Matematika 41

Gambar 3

Instrumen Penilaian Keterampilan

Mata Pelajaran : Matematika
Kelas : XII
Nama Projek : Membuat Paper Menentukan Determinan Matriks 4x4 dan Sifat-Sifatnya.
Alokasi Waktu :

Petunjuk: Berilah skor yang sesuai dengan Paper yang dibuat oleh peserta didik
Skor 4 : Kategori Sangat baik
Skor 3 : Kategori Baik
Skor 2 : Kategori Cukup
Skor 1 : Kategori Kurang

Nama Peserta Didik/Kelompok :
Tabel Instrumen Penilaian Keterampilan

No	Aspek dan Deskriptor	Skor (1 – 4)
1	Tata Bahasa	
	• Menggunakan bahasa Indonesia dengan baik dan benar	
	• Ketepatan penggunaan istilah dan simbol	
2	Proses Menemukan Determinan 4x4	
	• Dapat menentukan minor dan kofaktor matriks 4x4	
	• Dapat menemukan rumus umum determinan matriks 4x4	
	• Dapat memberikan contoh menentukan determinan matriks 4x4	
	• Dapat menemukan sifat determinan matriks 4x4 (skor 1 jika menemukan 1 sifat, skor 2 jika menemukan 2 sifat, skor 3 jika menemukan 3 sifat, skor 4 jika menemukan lebih dari 4 sifat).	
	• Dapat membuktikan sifat-sifat determinan matriks 4x4 yang ditemukan.	
	• Dapat memberikan contoh terkait sifat-sifat determinan 4x4	
3	Penyajian	
	• Jenis huruf mudah dibaca	
	• Ukuran huruf sesuai	
	• Paper disajikan dengan rapih	

Petunjuk Penilaian

$$\text{Nilai Projek} = \frac{\text{Skor diperoleh}}{\text{Skor maksimal}} \times 100$$

332 Buku Guru Kelas XII SMA/MA

Gambar 4

Dalam buku siswa maupun dalam buku guru ada beberapa ikon-kon yang digunakan untuk merepresentasikan 5 pengalaman belajar dalan pendekatan *saintifik*. Untuk dapat memberikan gambaran tentang masing-masing 5 pengalaman belajar yang dimaksud berikut penjelasan masing-masing:

Ikon ini mewakili pengalaman belajar Mengamati. Aktivitas siswa berupa mengamati dengan indra (membaca, mendengar, menyimak, melihat, menonton, dan sebagainya) dengan atau tanpa alat. Bentuk hasil belajar yang diharapkan adalah perhatian pada waktu mengamati suatu objek/membaca suatu tulisan/mendengar suatu penjelasan, catatan yang dibuat tentang yang diamati, kesabaran, waktu (*on task*) yang digunakan untuk mengamati.

Ayo Menanya

Ikon ini mewakili pengalaman belajar Menanya. Aktivitas siswa berupa membuat dan mengajukan pertanyaan atau *hipotesa*/dugaan, tanya jawab, berdiskusi tentang informasi yang belum dipahami, informasi tambahan yang ingin diketahui, atau sebagai klarifikasi. Bentuk hasil belajar yang diharapkan jenis, kualitas, dan jumlah pertanyaan yang diajukan peserta didik (pertanyaan faktual, konseptual, prosedural, dan hipotetik)

Ikon ini mewakili pengalaman belajar mengumpulkan informasi. Aktivitas siswa berupa Mengeksplorasi, mencoba, berdiskusi, mendemonstrasi-kan, meniru bentuk/gerak, melakukan eksperimen, membaca sumber lain selain buku teks, mengumpulkan data dari nara sumber melalui angket, wawancara, dan memodifikasi/menambahi/mengembangkan. Bentuk hasil belajar yang diharapkan jumlah dan kualitas sumber yang dikaji/digunakan, kelengkapan informasi, validitas informasi yang dikumpulkan, dan instrumen/alat yang digunakan untuk mengumpulkan data.

Ikon ini mewakili pengalaman belajar Menalar. Aktivitas siswa berupa mengolah informasi yang sudah dikumpulkan, menganalisis data dalam bentuk membuat kategori, mengasosiasi atau menghubungkan fenomena/informasi yang terkait dalam rangka menemukan suatu pola, dan menyimpulkan. Bentuk hasil belajar yang diharapkan mengembangkan interpretasi, argumentasi dan kesimpulan mengenai keterkaitan informasi dari dua fakta/konsep, interpretasi argumentasi dan kesimpulan mengenai keterkaitan lebih dari dua fakta/konsep/teori, mensintesis dan argumentasi serta kesimpulan keterkaitan antar berbagai jenis fakta-fakta/konsep/teori/pendapat; mengembangkan interpretasi, struktur baru, argumentasi, dan kesimpulan yang menunjukkan hubungan fakta/konsep/teori

dari dua sumber atau lebih yang tidak bertentangan; mengembangkan interpretasi, struktur baru, argumentasi dan kesimpulan dari konsep/teori/pendapat yang berbeda dari berbagai jenis sumber.

Ikon ini mewakili pengalaman belajar Mengomunikasikan. Aktivitas siswa berupa menyajikan laporan dalam bentuk bagan, diagram, atau grafik; menyusun laporan tertulis; dan menyajikan laporan meliputi proses, hasil, dan kesimpulan secara lisan. Bentuk hasil belajar yang diharapkan menyajikan hasil kajian (dari mengamati sampai menalar) dalam bentuk tulisan,grafis, media elektronik, multi media dan lain-lain.

Bab 1

Matriks

Kompetensi Dasar Dan Pengalaman Belajar

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
1.1 Menghayati dan mengamalkan ajaran agama yang dianutnya. 2.1 Menghayati perilaku disiplin, sikap kerjasama, sikap kritis dan cermat dalam bekerja menyelesaikan masalah kontekstual. 3.1 Menganalisis konsep, nilai determinan dan sifat operasi matriks serta menerapkannya dalam menentukan invers matriks dan dalam memecahkan masalah. 4.1 Menyajikan dan menyelesaikan model matematika dalam bentuk persamaan matriks dari suatu masalah nyata yang berkaitan dengan persamaan linear.	Melalui pembelajaran matriks, siswa memperoleh pengalaman belajar: 1. Mengamati dan menemukan konsep determinan matriks beserta sifat operasi determinan matriks. 2. Mengamati dan menemukan konsep invers dari matriks. 3. Menerapkan konsep matriks dalam menyelesaikan masalah sehari-hari.

Sumber : http//www.dreamstime.com

Biografi Grabiel Cramer

Sumber: wikipedia.org

Gabriel Cramer (1704 – 1752) adalah seorang ahli matematika dari Swiss. Meski Cramer tidak digolongkan sebagai ahli matematika terbesar pada zamannya, tetapi kontribusinya sebagai pemilah gagasan-gagasan matematis telah memberinya posisi terhormat dalam sejarah matematika. Cramer melakukan banyak perjalanan dan bertemu dengan banyak ahli matematika terkemuka pada masa itu.

Hasil karya Cramer yang paling terkenal adalah *Introduction al'analyse des lignes courbes algebriques* (1750), yang merupakan studi dan klasifikasi kurva-kurva aljabar dimana *aturan Cramer* muncul dalam lampirannya.

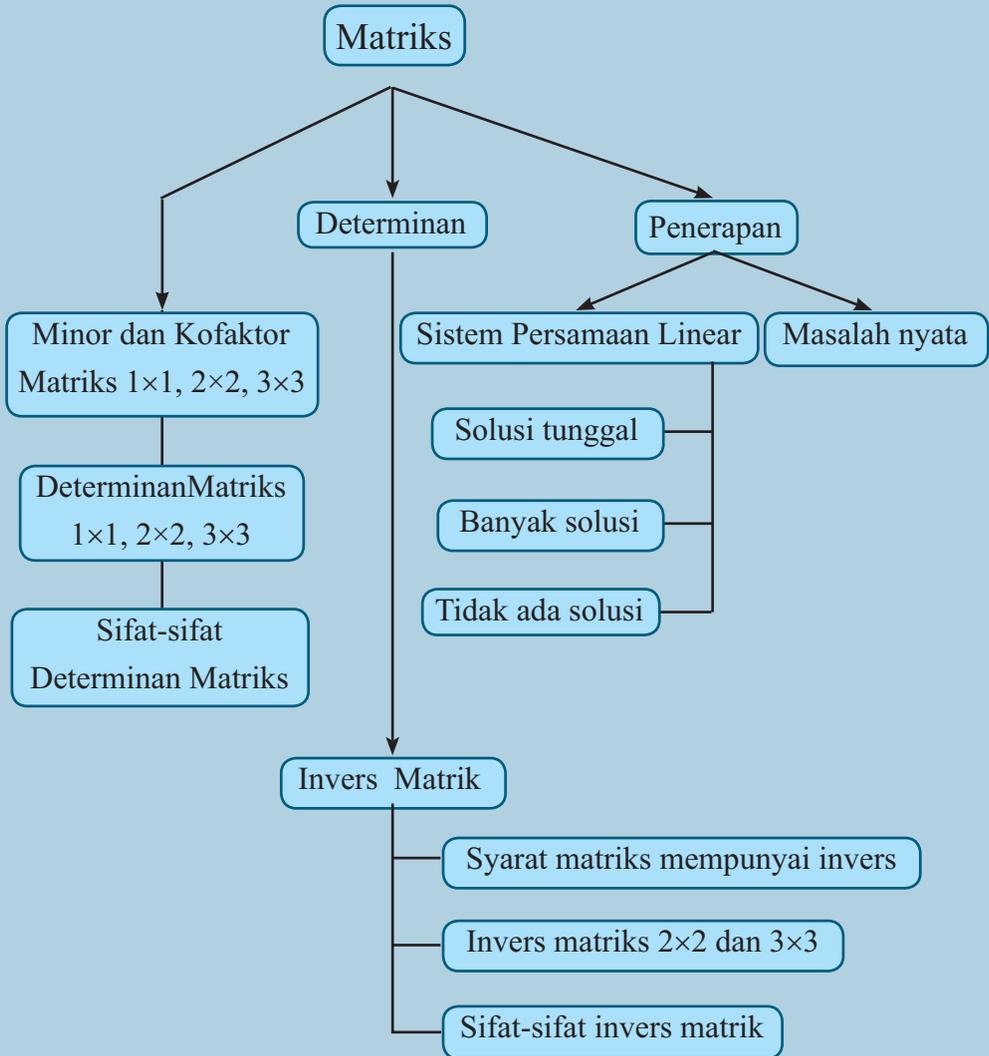
Meskipun aturan itu menggunakan namanya, tetapi berbagai gagasan telah dirumuskan sebelumnya oleh banyak ahli matematika. Namun demikian, catatan penting Cramerlah yang membantu memperjelas dan mempopulerkan teknik ini.

Kematiannya pada usia 48 tahun disebabkan kerja terlalu keras dan kecelakaan akibat terjatuh dari kereta. Cramer adalah orang yang baik dan menyenangkan dan mempunyai minat yang luas. Ia menulis mengenai filsafat hukum dan pemerintahan serta sejarah matematika. Ia bekerja pada kantor pemerintahan dan berpartisipasi di angkatan bersenjata di bagian artileri dan kegiatan pembentengan pemerintah. Ia juga menjadi instruktur bagi para pekerja mengenai teknik perbaikan katedral dan melakukan penggalian peninggalan katedral. Cramer menerima banyak gelar kehormatan untuk kegiatan-kegiatan yang dilakukannya.

(*sumber: Anton, H. Dan Rorres, C. 2004. Aljabar Linear Elementer, Versi Aplikasi, terjemahan. Jakarta: Erlangga*).
www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cramer.html

Hikmah yang mungkin bisa kita petik adalah:
Hasil baik yang didapat dikemudian hari merupakan buah dari kerja keras.

Peta Konsep

Matriks
Determinan
Penerapan
Minor dan Kofaktor Matriks 1×1, 2×2, 3×3
DeterminanMatriks 1×1, 2×2, 3×3
Sifat-sifat Determinan Matriks
Sistem Persamaan Linear
Masalah nyata
Solusi tunggal
Banyak solusi
Tidak ada solusi
Invers Matrik
Syarat matriks mempunyai invers
Invers matriks 2×2 dan 3×3
Sifat-sifat invers matrik

Ingat Kembali

Konsep matriks telah Anda pelajari di kelas X. Matriks didefinisikan sebagai susunan bilangan yang diatur menurut aturan baris dan kolom dalam suatu susunan berbentuk persegipanjang. Susunan bilangan itu diletakkan di dalam kurung biasa “( )” atau kurung siku “[ ]”. Untuk menamakan matriks, disepakati menggunakan huruf kapital.

Ordo atau ukuran matriks menyatakan banyaknya baris dan kolom suatu matriks dan dinotasikan dengan $m \times n$ (m baris dan n kolom).

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks A memiliki dua baris dan dua kolom, ditulis $A_{2\times 2}$. Matriks B memiliki dua baris dan tiga kolom, ditulis $B_{2\times 3}$.

Unsur atau elemen matriks pada baris ke-i kolom ke-j dinotasikan $\boldsymbol{a_{ij}}$. Pada matriks A di atas, elemen baris ke-1 kolom ke-1 (a_{11}) adalah 2, elemen baris ke-1 kolom ke-2 (a_{12}) adalah 1, elemen baris ke-2 kolom ke-1 (a_{21}) adalah a, dan elemen baris ke-2 kolom ke-2 (a_{22}) adalah b.

Pada pembahasan ini, Anda akan mempelajari pengertian determinan matriks 1×1, 2×2, dan 3×3 serta sifat-sifat determinan. Determinan matriks merepresentasikan suatu bilangan tunggal. Determinan diperoleh dengan mengalikan dan menjumlahkan elemen-elemen matriks dengan cara yang khusus. Pembahasan tentang determinan merupakan dasar untuk menentukan invers suatu matriks dan dalam masalah sistem persamaan linear.

Subbab 1.1 Determinan Matriks 1×1

Definisi

Definisi : Diberikan matriks $A = [a]$. Determinan matriks A, dinotasikan det(A) adalah a.

Catatan : notasi lain untuk determinan matriks A adalah |A| atau $|a|$, dengan $|A| = |a|$.

Membelajarkan Determinan Matriks dan Sifat-Sifatnya

Kegiatan Sebelum Pembelajaran

1. Ingatkan kembali tentang pengertian matriks dan entri matriks.
2. Ingatkan kembali tentang operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan transpose matriks.
3. Ajak siswa untuk mengamati dan mendiskusikan beberapa contoh dan masalah yang diberikan.

Contoh 1.1

Diberikan matriks $B=[2]$ dan $C=[-3]$. Tentukan determinan dari matriks B dan C

Alternatif Penyelesaian

Berdasarkan definisi determinan matriks 1×1, det(B) = 2 dan det(C) = –3

Hati-hati, untuk matriks 1×1 jangan bingung dengan notasi "| |" pada determinan dan notasi nilai mutlak.

Subbab 1.2 Menentukan Determinan Matriks 2×2 dan Sifat-sifatnya Menggunakan Kofaktor.

Kegiatan 1.2.1 Minor, Kofaktor dan Determinan Matriks 2×2

Determinan matriks hanya dimiliki oleh matriks persegi. Determinan matriks dapat digunakan untuk menentukan invers matriks atau menyelesaikan sistem persamaan linear. Pada subbab ini akan mempelajari determinan matriks 2×2 yang didasarkan pada ekspansi kofaktor. Untuk menentukan kofaktor Anda harus mempelajari minor suatu matriks terlebih dahulu.

Contoh 1.2

Diberikan matriks $A=\begin{bmatrix}-3 & 5\\-1 & 2\end{bmatrix}$. Dari matriks A diperoleh:

$M_{11}=|2|=2$ $\qquad C_{11}=(-1)^{1+1}\cdot 2=2$

$M_{12}=|-1|=-1$ $\qquad C_{12}=(-1)^{1+2}\cdot(-1)=1$

1.2 Determinan Matriks 2×2 dan Sifatnya

Ajak siswa untuk mengamati Contoh 1.2 Ingatkan kembali pengertian tentang entri matriks.

Setelah mengamati contoh 1.2 Minta siswa untuk mengamati Tabel 1.

Tabel 1 menunjukkan proses menentukan minor matriks 2×2.

$M_{21} = |5| = 5$ $\qquad C_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 5 = -5$

$M_{22} = |-3| = -3$ $\qquad C_{22} = (-1)^{2+2} \cdot (-3) = -3$

M_{11} disebut minor entri a_{11} dan C_{11} disebut kofaktor entri a_{11}

M_{12} disebut minor entri a_{12} dan C_{12} disebut kofaktor entri a_{12}

M_{21} disebut minor entri a_{21} dan C_{21} disebut kofaktor entri a_{21}

M_{22} disebut minor entri a_{22} dan C_{22} disebut kofaktor entri a_{22}

Hubungan antara minor tiap entri matriks A dan matriks A disajikan dalam Tabel 1 berikut.

Tabel 1. Hubungan antara minor tiap entri matriks A dan matriks A

Entry	Minor	Hubungan dengan Matriks A	Keterangan
$a_{11} = -3$	$M_{11} = \|2\| = 2$	$\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$	Baris pertama dihapus Kolom pertama dihapus
$a_{12} = 5$	$M_{12} = \|-1\| = -1$	$\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$	Baris pertama dihapus Kolom kedua dihapus
$a_{21} = -1$	$M_{21} = \|5\| = 5$	$\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$	Baris kedua dihapus Kolom pertama dihapus
$a_{22} = 2$	$M_{22} = \|-3\| = -3$	$\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$	Baris kedua dihapus Kolom pertama dihapus

Dari Tabel 1, M_{11} adalah determinan submatriks setelah baris ke-1 dan kolom ke-1 dihapus. M_{12} adalah determinan submatriks setelah baris ke-1 dan kolom ke-2 dihapus. M_{21} adalah determinan submatriks setelah baris ke-2 dan kolom ke-1 dihapus. M_{22} adalah determinan submatriks setelah baris ke-2 dan kolom ke-2 dihapus.

Contoh 1.3

Diberikan matriks $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$. Tentukan semua minor dan matriks kofaktor matriks B.

Alternatif Penyelesaian

Berdasarkan definisi, minor dan kofaktor matriks B disajikan dalam tabel berikut.

Minor	Kofaktor
$M_{11} = \lvert 4 \rvert = 4$	$C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4$
$M_{12} = \lvert 1 \rvert = 1$	$C_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 1 = -1$
$M_{21} = \lvert 3 \rvert = 3$	$C_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 3 = -3$
$M_{22} = \lvert 2 \rvert = 2$	$C_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 2 = 2$

Minor matriks $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ dan matriks kofaktor dari matriks $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$.

Contoh 1.4

Diberikan matriks $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. Tentukan semua minor dan kofaktor masing-masing entri matriks C.

Alternatif Penyelesaian

Minor	Kofaktor
$M_{11} = \|0\| = 0$	$C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 0 = 0$
$M_{12} = \|2\| = 2$	$C_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 2 = -2$
$M_{21} = \|3\| = 3$	$C_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 3 = -3$
$M_{22} = \|2\| = 2$	$C_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 2 = 2$

Minor matriks C adalah $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ dan kofaktor matriks C adalah $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

Berdasarkan Contoh 1.2, Contoh 1.3, dan Contoh 1.4 buatlah definisi tentang minor dan kofaktor dari suatu entri matriks 2×2. Tulislah definisi yang Anda buat pada tempat berikut ini.

Kegiatan 1.2.2 Determinan Matriks 2×2.

Determinan matriks 2×2 didefinisikan sebagai berikut.

Definisi

Definisi Determinan.

Diberikan Matriks *A* ordo 2×2. Determinan matriks *A* didefinisikan sebagai:

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12}$$

Dengan a_{11}, a_{12} berturut-turut entri baris ke-1 kolom ke-1 dan entri baris ke-1 kolom ke-2 pada matriks *A*. C_{11} dan C_{12} berturut-turut kofaktor entri a_{11} dan a_{12}

Contoh 1.5

Matriks $B=\begin{bmatrix}2 & 3\\1 & 4\end{bmatrix}$ pada Contoh 1.3 memiliki kofaktor $\begin{bmatrix}4 & -1\\-3 & 2\end{bmatrix}$.

Berdasarkan definisi determinan matriks diperoleh $\det(B)=2\cdot4+3\cdot(-1)=5$

Ayo Menanya

Dari beberapa contoh di atas, mungkin ada pertanyaan-pertanyaan yang ingin Anda sampaikan. Pertanyaan berikut mungkin juga Anda tanyakan adalah: "Apakah ada cara lain untuk menentukan determinan matriks 2×2?",

Tulis pertanyaan Anda pada tempat berikut.

Ayo Menalar

Contoh 1.6

Diberikan matriks $D=\begin{bmatrix}2 & 2\\-1 & 1\end{bmatrix}$. Minor matriks D adalah $\begin{bmatrix}1 & -1\\2 & 2\end{bmatrix}$ dan matriks kofaktor dari matriks D adalah $\begin{bmatrix}1 & 1\\-2 & 2\end{bmatrix}$. Berdasarkan definisi determinan matriks diperoleh $\det(D)=2\cdot1+2\cdot1=4$.

Perlu Anda ketahui, definisi determinan matriks $A_{2\times2}$ adalah $\det(A)=a_{11}C_{11}+a_{12}C_{12}$, dengan $a_{11},a_{12},C_{11},C_{12}$ berturut-turut entri baris ke-1 kolom ke-1, entri baris ke-1 kolom ke-2, kofaktor entri a_{11} dan kofaktor entri pada matriks A. $a_{11}C_{11}+a_{12}C_{12}$ disebut ekspansi kofaktor baris pertama pada matriks A.

Ayo Menanya

Minta siswa untuk membuat pertanyaan setelah mengamati beberapa contoh sebelumnya. Ingatkan siswa untuk menulis pertanyaan pada tempat yang disediakan.

Ayo Menalar

Contoh 1.6 menjelaskan tentang ekspansi kofaktor baris pertama, baris kedua, kolom pertama dan kolom kedua. Ekspansi kofaktor baris dan kolom merupakan determinan.

Determinan matrik secara umum dapat dicari dengan ekspansi kofaktor baris ke-i atau kolom ke-j pada matriks tersebut.

Coba Anda tentukan ekspansi baris pertama, kedua, kolom pertama dan kolom kedua matriks D.

Tulis hasil yang Anda dapatkan pada tempat berikut:

Ekspansi Kofaktor	Determinan Matriks D
Baris pertama	$a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} = 2\cdot1 + 2\cdot1 = 4$
Baris kedua	$a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} = (-2)\cdot(-1) + 1\cdot2 + 4$
Kolom pertama	$a_{11}C_{21} + a_{21}C_{21} = 2\cdot1 + (-1)\cdot(-2) = 4$
Kolom kedua	$a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} = 2\cdot1 + 1\cdot2 = 4$

 Tantangan

Anda telah mempelajari bagaimana menentukan determinan matriks 2×2 melalui ekpansi kofaktor. Sekarang coba Anda membuat rumus sederhana untuk menentukan determinan matriks 2×2 jika diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dengan menggunakan definisi determinan matriks 2×2. Tuliskan pekerjaan Anda pada tempat berikut.

Tantangan.

Tantang siswa untuk menemukan determinan matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Harapannya siswa dapat menemukan $\det(A) = ad - bc$

Kegiatan 1.2.3 Sifat-sifat Determinan Matriks 2×2

Anda telah mempelajari determinan matriks 2×2 dengan ekspansi kofaktor. Selanjutnya Anda akan mempelajari sifat-sifat determinan matriks 2×2.

Contoh 1.7

Diberikan matriks $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ dan $B=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$.

$\det(A)=1\cdot 1-3\cdot 2=-5$ dan $\det(B)=3\cdot 1-(-2)\cdot 2=7$

Jika kedua matriks tersebut dikalikan maka

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -2\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3+6 & -2+3\\ 6+2 & -4+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 1\\ 8 & -3\end{bmatrix}$$

$\det(AB)=9\cdot(-3)-1\cdot 8=-35$

$$BA=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3-4 & 9-2\\ 2+2 & 6+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 7\\ 4 & 7\end{bmatrix}$$

$\det(BA)=(-1)\cdot 7-7\cdot 4=-35$

Contoh 1.8

Diberikan matriks $C=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 2\end{bmatrix}$ dan $D=\begin{bmatrix}0 & 9\\ -2 & -1\end{bmatrix}$

$\det(C)=1\cdot 2-2\cdot(-3)=8$ dan $\det(D)=0\cdot(-1)-9\cdot(-2)=18$

Sehingga $\det(C)\cdot\det(D)=8\cdot 18=144$

Jika kedua matriks tersebut dikalikan, maka

Ayo Mengamati

Ajak siswa untuk mengamati contoh 1.7 sampai 1.13. Contoh tersebut membimbing siswa untuk menemukan sifat-sifat determinan matriks. Dalam menentukan determinan, siswa diajak untuk menggunakan rumus $\det(A)=ad-bc$

$$CD=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 9\\ -2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0-4 & 9-2\\ 0-4 & -27-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 7\\ -4 & -29\end{bmatrix}$$

$\det(CD)=(-4)\cdot(-29)-7\cdot(-4)=144$

$$DC=\begin{bmatrix}0 & 9\\ -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0-27 & 0+18\\ -2+3 & -4-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-27 & 18\\ 1 & -6\end{bmatrix}$$

$\det(DC)=(-27)\cdot(-6)-18\cdot 1=144$

Contoh 1.9

Diketahui matriks $E=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 7\end{bmatrix}$. Transpose dari matriks E adalah $E^T=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 7\end{bmatrix}$

$\det(E)=2\cdot 7-3\cdot 1=11$ dan $\det(E^T)=2\cdot 7-1\cdot 3=11$

Contoh 1.10

Diketahui matriks $F=\begin{bmatrix}1 & 8\\ -2 & 0\end{bmatrix}$. Transpose dari matriks F adalah

$F^T=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 8 & 0\end{bmatrix}$

$\det(F)=1\cdot 0-8\cdot(-2)=16$ dan $\det(F^T)=1\cdot 9-(-2)\cdot 8=16$

Contoh 1.11

Diketahui matriks $G=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 5 & 2\end{bmatrix}$, $H=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$, dan $I=\begin{bmatrix}1 & 5\\ -3 & 9\end{bmatrix}$. Pada matriks-matriks tersebut berlaku hubungan $GH=I$

$\det(G)=1\cdot 2-2\cdot 5=-8$ dan $\det(H)=(-1)\cdot 2-1\cdot 1=-3$

serta $\det(I)=1\cdot 9-5\cdot(-3)=24$

$$\det(G) = -8 = \frac{24}{-3} = \frac{\det(I)}{\det(H)} \qquad \det(H) = -3 = \frac{24}{-8} = \frac{\det(I)}{\det(G)}$$

Contoh 1.12

Diketahui matriks $J = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ dan $K = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

$$3J = 3\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 18 & 24 \end{bmatrix}$$

$$|3J| = 6 \cdot 24 - 12 \cdot 18 = 9(2 \cdot 8 - 4 \cdot 6) = 3^2 |J|$$

$$2K = 2\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 10 & 14 \end{bmatrix} = 2 \cdot 14 - 6 \cdot 10 = 4(1 \cdot 7 - 3 \cdot 5) = 2^2 |K|$$

Contoh 1.13

Jika semua unsur pada suatu baris atau kolom matriks $L = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dikalikan skalar k, apa yang dapat disimpulkan?

Alternatif Penyelesaian

Untuk membuat kesimpulan secara umum, perlu ditinjau beberapa kasus. Kasus pertama, masing-masing entri baris pertama dikalikan skalar k kemudian dicari determinannya. Kasus kedua, masing-masing entri baris kedua dikalikan skalar k kemudian dicari determinannya. Kasus ketiga, masing-masing entri kolom pertama dikalikan skalar k kemudian dicari determinannya. Kemudian Kasus keempat, masing-masing entri kolom kedua dikalikan skalar k kemudian dicari determinannya. Dari keempat kasus tersebut, buatlah kesimpulan.

Sekarang, carilah determinan dari masing-masing kasus di atas dan buatlah kesimpulan pada tempat berikut.

Ayo Menanya

Setelah Anda mengamati dengan cermat Contoh 1.7 sampai Contoh 1.13, mungkin Anda mempunyai beberapa pertanyaan. Mungkin salah satu pertanyaan Anda adalah sebagai berikut:

1. Apakah pada matriks berordo 2×2 selalu berlaku $\det(A)\cdot\det(B)=\det(AB)$
2. Apakah pada matriks berordo 2×2 selalu berlaku $\det(A)=\det(A^T)$
3. Jika $AB = C$, dengan A, B dan C adalah matriks berordo 2×2, apakah A, B $\det(A)=\dfrac{\det(C)}{\det(B)}$ berlaku secara umum? dan apakah $\det(B)=\dfrac{\det(C)}{\det(A)}$ juga berlaku secara umum?

Nah, tuliskan pertanyaan-pertanyaan Anda pada tempat berikut:

Ayo Menanya

Minta siswa untuk membuat beberapa pertanyaan. Pertanyaan-pertanyaan diarahkan pada sifat-sifat matriks 2x2.

Ayo Menalar

Untuk menjawab beberapa pertanyaan tentang sifat determinan matriks, buat beberapa matriks dalam bentuk umum, misalkan $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$

Selidiki apakah det(A)·det(B) = det(AB) berlaku secara umum?

Petunjuk: untuk menyeleidiki apakah berlaku det(A)·det(B) = det(AB), tentukan det(A), det(B) dan tentukan matriks AB, kemudian carilah det(AB) Tulis hasilnya pada tempat berikut.

Menyelidiki apakah $\det(A) = \det(A^T)$ berlaku secara umum?

Petunjuk: untuk menyeleidiki apakah berlaku $\det(A) = \det(A^T)$, tentukan $\det(A), A^T$, dan $\det(A^T)$ Tulis hasilnya pada tempat berikut.

Selidiki apakah Jika $AB = C$, dengan $A, B,$ dan C adalah matriks berordo 2×2 dengan $\det(A) \neq 0, \det(B) \neq 0$, maka berlaku $\det(A) = \dfrac{\det(C)}{\det(B)}$ atau $\det(B) = \dfrac{\det(C)}{\det(A)}$?

Minta siswa untuk membuat matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$. Minta siswa untuk menyelidiki apa sifat determinan yang disebutkan berlaku secara umum melalui petunjuk yang diberikan.

Petunjuk: kalikan matriks A dan B sehingga menghasilkan matriks C. Hitung $\det(C)$, $\det(B)$ dan $\det(A)$. Tulis hasilnya pada tempat berikut.

Contoh 1.14

Buatlah sebarang dua matriks A dan B dengan ordo 2x2. Kemudian tentukanlah:

a. $A + B$

b. $A - B$

c. $\det(A)$ dan $\det(B)$

d. $\det(A + B)$ dan $\det(A - B)$

ulangi perintah (a) sampai (d) dengan sebarang dua matriks ordo 2×2 yang lain.

Buatlah kesimpulan dari kegiatan yang telah Anda lakukan kemudian tulislah kesimpulan tersebut pada tempat berikut.

Anda telah membuat kesimpulan tentang sifat-sifat determinan matriks berordo 2×2. Tulislah kesimpulan yang Anda buat pada selembar kertas. Kemudian tukarkan kesimpulan Anda dengan teman yang lain. Cermati kesimpulan teman Anda, kritisi, dan tanyakan jika ada hal yang kurang mengerti. Secara santun, berikan saran perbaikan jika dianggap perlu.

Minta siswa untuk membuat kesimpulan tentang sifat-sifat determinan matriks 2×2. Beri kesempatan kepada siswa untuk menyampaikan kesimpulan.

Alternatif Penyelesaian Contoh 1.14

Pada contoh 1.14, diharapkan siswa dapat menyimpulkan bahwa pernyataan $\det(A) + \det(B) = \det(A + B)$ tidak berlaku umum. Demikian juga pernyataan $\det(A) - \det(B) = \det(A - B)$ tidak berlaku umum.

Subbab 1.3. Determinan Matriks 3×3 dan Sifat-Sifatnya

Pada pembahasan sebelumnya Anda telah mempelajari determinan matriks berordo 2×2 beserta sifat-sifat determinannya. Selanjutnya, Anda akan mempelajari determinan matriks berordo 3×3. Sebelum mempelajari cara menentukan determinan matriks ordo 3×3, Anda harus mempelajari tentang pengertian minor dan kofaktor pada matriks 3×3.

Contoh 1.15

Diberikan matriks $M = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 4 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}$. Tentukan minor dan kofaktor matriks M.

Alternatif Penyelesaian

Untuk menentukan minor dan kofaktor masing-masing entri matriks M serupa dengan menentukan minor dan kofaktor matrik ordo 2×2. Minor dari a_{11}, disimbolkan M_{11} adalah determinan submatriks setelah baris pertama dan kolom pertama dihapus. Berikut disajikan minor masing-masing entri matriks M.

Entry	Matriks M	Minor	Keterangan
M_{11}	$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 4 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 46$	Baris pertama dihapus Kolom pertama dihapus
M_{12}	$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 4 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 48$	Baris pertama dihapus Kolom kedua dihapus

Ingatkan kembali tentang definisi minor dan kofaktor dan determinan matriks 2×2. Kemudian minta siswa untuk mengamati Contoh 1.15 dan 1.16. Contoh 1.15 dan 1.16 menunjukkan bagaimana menentukan minor dan kofaktor dari matriks 3×3.

Entry	Matriks M	Minor	Keterangan
M_{13}	$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 4 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -8$	Baris pertama dihapus Kolom kedua dihapus
M_{21}	$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 4 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 13$	Baris kedua dihapus Kolom pertama dihapus
M_{22}	$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 4 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -6$	Baris kedua dihapus Kolom kedua dihapus
M_{23}	$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 4 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$	Baris kedua dihapus Kolom ketiga dihapus
M_{31}	$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 4 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 1$	Baris ketiga dihapus Kolom pertama dihapus
M_{32}	$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 4 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = -12$	Baris ketiga dihapus Kolom kedua dihapus
M_{33}	$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 4 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = -23$	Baris ketiga dihapus Kolom ketiga dihapus

Sehingga minor matriks M adalah $\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46 & 48 & -8 \\ 13 & -6 & 1 \\ 1 & -12 & -23 \end{bmatrix}$

$C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = (-1)^2 \cdot 46 = 46$

$C_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1)^3 \cdot 48 = -48$

$C_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = (-1)^4 \cdot (-8) = -8$

$C_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = (-1)^3 \cdot 13 = -13$

$C_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = (-1)^4 \cdot (-6) = -6$

$C_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = (-1)^5 \cdot 1 = -1$

$C_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = (-1)^4 \cdot 1 = 1$

$C_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = (-1)^5 \cdot (-12) = 12$

$C_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = (-1)^6 \cdot (-23) = -23$

Sehingga kofaktor matriks M adalah $\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46 & -48 & -8 \\ -13 & -6 & -1 \\ 1 & 12 & -23 \end{bmatrix}$

Contoh 1.16

Tentukan minor dan kofaktor matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ -3 & 4 & -4 \end{bmatrix}$.

Alternatif Penyelesaian

$M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = -12$ $\quad M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = -4$ $\quad M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3$

$M_{12} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = 8$ $\quad M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = -7$ $\quad M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -2$

$M_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 1$ $\quad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 10$ $\quad M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 7$

Sehingga minor matriks A adalah $\begin{bmatrix} -12 & 8 & 1 \\ -4 & -7 & 10 \\ 3 & -2 & 7 \end{bmatrix}$

dan kofaktornya $\begin{bmatrix} -12 & -8 & 1 \\ 4 & -7 & -10 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$

Contoh 1.17

Matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ -3 & 4 & -4 \end{bmatrix}$ pada Contoh 1.16 memiliki kofaktor $\begin{bmatrix} -12 & -8 & 1 \\ 4 & -7 & -10 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$. Tentukan ekpansi kofaktor baris pertama, kedua, dan ketiga serta ekspansi kofaktor kolom pertama, kedua dan ketiga pada matriks A.

Alternatif Penyelesaian

Ekspansi kofaktor baris ke-i matriks 3×3 didefinisikan sebagai $a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + a_{i3}C_{i3}$ dengan a_{ij} adalah entri baris ke-i kolom ke-j dan C_{ij} kofaktor baris ke-i kolom ke-j.

Ekspansi kofaktor baris ke-1 pada matriks A = $1 \cdot (-12) + 2 \cdot (-8) + (-1) \cdot 1 = -29$

Ekspansi kofaktor baris ke-2 pada matriks A = $(-2) \cdot 4 + 3 \cdot (-7) + 0 \cdot (-10) = -29$

Ekspansi kofaktor baris ke-3 pada matriks A = $(-3) \cdot 3 + 4 \cdot 2 + (-4) \cdot 7 = -29$

Ekspansi kofaktor kolom ke-j matriks 3×3 didefinisikan sebagai $a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + a_{3j}C_{3j}$.

Ekspansi kofaktor kolom ke-1 pada matriks $A = 1 \cdot (-12) + (-2) \cdot 4 + (-3) \cdot 3 = -29$

Ekspansi kofaktor kolom ke-2 pada matriks $A = 2 \cdot (-8) + 3 \cdot (-7) + 4 \cdot 2 = -29$

Ekspansi kofaktor kolom ke-3 pada matriks $A = (-1) \cdot 1 + 0 \cdot (-10) + (-4) \cdot 7 = -29$

Alternatif Penyelesaian Contoh 1.17

Contoh 1.17 menjelaskan tentang ekspansi kofaktor pada matriks A. Ekspansi kofaktor pada baris ke-i atau kolom ke-j menghasilkan nilai yang sama yang disebut determinan.

Jika diamati ekpansi kofaktor baris ke-i atau kolom ke-j pada contoh 1.17 menghasilkan nilai yang sama, yaitu –29. Nilai inilah yang disebut dengan determinan matriks A.

Contoh 1.18

Tunjukkan bahwa determinan matrik $R = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ adalah 11.

Alternatif Penyelesaian

Minor untuk masing-masing entri matriks R adalah $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ dengan matriks kofaktornya $\begin{bmatrix} 5 & -6 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Ekspansi kofaktor baris pertama $= 1 \cdot 5 + (-1) \cdot (-6) + 0 \cdot 2 = 5 + 6 = 11$

Jadi benar bahwa determinan matriks R adalah 11.

Coba Anda selidiki ekspansi kofaktor baris kedua, baris ketiga, kolom pertama, kolom kedua, dan kolom ketiga.

Contoh 1.19

Matriks $N = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & p & 1 \\ p & 0 & 4 \end{bmatrix}$ mempunyai determinan 9. Tentukan nilai terkecil $p+9$.

Alternatif Penyelesaian

Akan dicari C_{11}, C_{12}, dan C_{13}.

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} p & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (4p - 0) = 4p$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ p & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (0 - p) = p$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & p \\ p & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (0 - p^2) = -p^2$$

Oleh karena $\det(N) = 9$, maka

$$\begin{aligned} \det(N) &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} \\ 9 &= 2 \cdot 4p + 3 \cdot p + 2 \cdot (-p^2) \\ 0 &= -2p^2 + 11p - 9 \\ 0 &= 2p^2 - 11p + 9 \\ 0 &= (2p - 9)(p - 1) \end{aligned}$$

Sehingga $p = 1$ atau $p = \dfrac{9}{2}$.

Jadi nilai terkecil $p + 9$ adalah $1 + 9 = 10$

Setelah mengamati Contoh 1.17, 1.18, dan 1.19, silahkan Anda definisikan determinan matriks 3×3

Definisi

Definisi Determinan Matriks 3×3.

Misalkan matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ memiliki kofaktor $\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$,

determinan matriks *A* didefinisikan sebagai $\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$

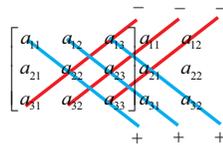
Contoh 1.20

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ dengan kofaktor matriks A $\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$ Berdasarkan definisi, determinan matriks A adalah $\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$.

jika diuraikan menghasilkan

$$\begin{aligned}
\det(A) &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} \\
&= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}
\end{aligned}$$

Jadi $\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$.

Untuk memudahkan menghafal $\det(A)$ digunakan cara kaidah Sarrus berikut:

Sebagai contoh, Tentukan determinan matriks $N = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Alternatif Penyelesaian Contoh 1.20

Contoh 1.20 menunjukkan cara yang lebih sederhana dalam menentukan determinan matriks 3×3. Cara ini disebut sebagai kaidah Sarrus.

Untuk menentukan determinan matriks N, digunakan *kaidah Sarrus*.

$$\det(N) = (-3)\cdot 1\cdot(-1) + 4\cdot 3\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 0 - 1\cdot 1\cdot 2 - 0\cdot 3\cdot(-3) - (-1)\cdot 2\cdot 4 = 21$$

Contoh 1.21

Diberikan Matriks $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Jika C^T adalah transpose matriks C, selidiki apakah $\det(C) = \det(C^T)$?

Alternatif Penyelesaian

Diketahui $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ sehingga $C^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$. Dengan menggunakan Kaidah Sarrus diperoleh

$$\det(C) = 1\cdot 8\cdot(-1) + 2\cdot 2\cdot 1 + (-1)\cdot 3\cdot 0 - 1\cdot 8\cdot(-1) - 0\cdot 2\cdot 1 - (-1)\cdot 3\cdot 2 = 10$$

$$\det(C^T) = 1\cdot 8\cdot(-1) + 3\cdot 0\cdot(-1) + 1\cdot 2\cdot 2 - (-1)\cdot 8\cdot 1 - 2\cdot 0\cdot 1 - (-1)\cdot 2\cdot 3 = 10$$

Jadi $\det(C) = \det(C^T)$

Alternatif Penyelesaian Contoh 1.21 s/d 1.23

Ajak siswa untuk mengamati Contoh 1.21 sampai 1.23. Contoh tersebut membimbing siswa untuk menemukan sifat-sifat determinan matriks. Dalam menentukan determinan, siswa diajak untuk menggunakan kaidah *Sarrus*.

Contoh 1.22

Diberikan matriks $K = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan $L = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -4 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Apakah $\det(KL) = \det(K) \cdot \det(L)$?

Alternatif Penyelesaian

$KL = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -4 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 10 & 6 \\ 10 & 6 & 6 \\ 5 & 7 & 6 \end{bmatrix}$. Dengan menggunakan kaidah Sarrus diperoleh:

$\det(KL) = (-2) \cdot 6 \cdot 6 + 10 \cdot 6 \cdot 5 + 6 \cdot 10 \cdot 7 - 5 \cdot 6 \cdot 6 - 7 \cdot 6 \cdot (-2) - 6 \cdot 10 \cdot 10 = -48$

$\det(K) = 2 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) \cdot 0 - 0 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \cdot 1 = -3$

$\det(\mathrm{L}) = 21 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-4) \cdot 1 - 3 \cdot 4 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot (-4) \cdot 3 = 16$

Jadi $\det(K) \cdot \det(L) = (-3) \cdot 16 = -48 = \det(KL)$

Contoh 1.23

Diberikan matriks $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$, tentukan $\det(3P)$ dan selidiki hubungannya dengan $\det(P)$

Alternatif Penyelesaian

$3P = 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \\ -3 & -6 & 3 \\ 9 & 15 & 6 \end{bmatrix}$, dengan menggunakan kaidah *Sarrus* diperoleh

$\det(3P) = 3\cdot(-6)\cdot 6 + 6\cdot 3\cdot 9 + 3\cdot(-3)\cdot 15 - 9\cdot(-6)\cdot 3 - 15\cdot 3\cdot 3 - 6\cdot(-3)\cdot 6 = 54$

$\det(P) = 1\cdot(-2)\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot 3 + 1\cdot(-1)\cdot 5 - 3\cdot(-2)\cdot 1 - 5\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot(-1)\cdot 2 = 2$

Hubungan $\det(3P)$ dengan $\det(P)$ adalah $\det(3P) = 27.\det(P) = 3^3 \det(P)$

Setelah mempelajari beberapa contoh di atas, tentu ada beberapa pertanyaan yang ingin Anda kemukakan. Mungkin pertanyaan-pertanyaan tersebut antara lain:

a. Apakah dalam matriks 3×3 selalu berlaku $\det(A) = \det(A^T)$?

b. Apakah $\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$ selalu berlaku dalam matriks 3×3?

c. Apakah $\det(kA) = k^3 \det(A)$ selalu berlaku dalam matriks 3×3?

d. Apakah $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$ selalu berlaku dalam matriks 3×3?

e. Apakah $\det(A-B) = \det(A) - \det(B)$ selalu berlaku dalam matriks 3×3?

Mungkin Anda memiliki pertanyaan lain yang ingin dikemukakan. Silahkan tulis pertanyaan tersebut pada tempat berikut.

Matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -7 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ adalah contoh matriks yang

Ayo Menanya

Minta siswa untuk membuat beberapa pertanyaan. Pertanyaan-pertanyaan diarahkan pada sifat-sifat matriks 3x3.

Ayo Menggali Informasi

Ajak siswa untuk menggali informasi apakah dalam matriks 3×3 selalu berlaku: $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$?

$\det(A-B) = \det(A) - \det(B)$?

Minta siswa untuk memberikan beberapa contoh penyangkal lain

tidak memenuhi hubungan $\det(A+B)=\det(A)+\det(B)$, mengapa? Coba Anda cari det(A), det(B), dan det(A + B).

Matrik $I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ dan $J=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$ adalah contoh matriks yang memenuhi hubungan $\det(I+J)=\det(I)+\det(J)$, mengapa?

Oleh karena dapat ditunjukkan contoh penyangkal yang mengakibatkan $\det(A+B)\neq\det(A)+\det(B)$, disimpulkan bahwa pada matriks 3×3 tidak selalu berlaku $\det(A+B)=\det(A)+\det(B)$. Masih banyak contoh penyangkal lain yang menyebabkan $\det(A+B)\neq\det(A)+\det(B)$, dapatkah Anda mencarinya?

Hubungan $\det(A-B)=\det(A)-\det(B)$ juga tidak selalu berlaku pada matriks 3×3. Sebagai contoh penyangkal matriks $A=\begin{bmatrix}1&9&2\\1&2&-1\\-5&-3&2\end{bmatrix}$ dan

$B=\begin{bmatrix}2&7&2\\1&-2&2\\1&-1&1\end{bmatrix}$ berturut-turut memiliki $\det(A)=42$ dan $\det(B)=9$.

$A-B=\begin{bmatrix}-1&2&0\\0&4&-3\\-6&-2&1\end{bmatrix}$ sehingga $\det(A-B)=38$

Dengan demikian $\det(A-B)\neq\det(A)-\det(B)$. Oleh karena dapat ditunjukkan contoh penyangkal, maka disimpulkan pada matriks 3×3 tidak selalu berlaku $\det(A-B)=\det(A)-\det(B)$. Masih banyak contoh penyangkal lain yang menyebabkan $\det(A-B)\neq\det(A)-\det(B)$, dapatkah Anda mencarinya?

Selidiki Apakah dalam matriks 3×3 selalu berlaku $\det(A) = \det(A^T)$?

Coba Anda selidiki apakah dalam matriks 3×3 selalu berlaku $\det(A) = \det(A^T)$.

Petunjuk: (1). Ambil sebarang matriks A, misal matrik $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$.

(2). Tentukan Transpose matriks A

(3). Tentukan det(A)

(4). Tentukan det(A^T)

(5). Bandingkan langkah (3) dan (4)

Tulis hasil pekerjaan Anda pada tempat berikut.

Selidiki Apakah dalam matriks 3×3 selalu berlaku $\det(kA) = k^3 \det(A)$?

Coba Anda selidiki apakah dalam matriks 3×3 selalu berlaku $\det(kA) = k \det(A)$.

Petunjuk: (1). Ambil sebarang matriks A, misal matrik $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$.

(2). Ambil sebarang skalar k, dengan $k \in R$.

(3). Tentukan $\det(kA)$.

(4). Tentukan $\det(A)$.

(5). Bandingkan hasil pada (3) dan (4), kemudian buatlah Kesimpulan.

Tulis hasil pekerjaan Anda pada tempat berikut.

Minta siswa untuk membuat matriks $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$.

Kemudiian minta siswa untuk menyelidiki apa sifat determinan yang disebutkan berlaku secara umum melalui petunjuk yang diberikan.

Tujuan yang ingin diharapkan adalah, siswa dapat menunjukkan dalam matriks 3×3 selalu berlaku:

1. $\det(A) = \det(A^T)$
2. $\det(kA) = k^3 \det(A)$, untuk $k \in R$
3. $\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$

Selidiki Apakah dalam matriks 3×3 selalu berlaku $\det(AB)=\det(A).\det(B)$?
Coba Anda selidiki apakah dalam matriks 3×3 selalu berlaku $\det(AB)=\det(A).\det(B)$.

Petunjuk: (1). Ambil sebarang matriks A, B, misal $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ p & q & r \end{bmatrix}$.

(2). Kalikan matriks A dan B kemudian tentukan $\det(AB)$

(3). Tentukan $\det(A)$ dan $\det(B)$, kemudian hitung $\det(A)\cdot\det(B)$

(4). Bandingkan hasil pada (2) dan (3), kemudian buatlah kesimpulan.

Tulis hasil pekerjaan Anda pada tempat berikut.

Setelah mempelajari uraian di atas, buatlah kesimpulan tentang sifat-sifat determinan matriks 3×3. Secara santun, mintalah ijin kepada Guru untuk mempresentasikan kesimpulan yang Anda buat.

Minta siswa untuk membuat kesimpulan tentang sifat-sifat determinan matriks 3×3. Beri kesempatan kepada siswa untuk menyampaikan kesimpulan.

Sesudah Pelaksanaan Pembelajaran

1. Ajak siswa untuk melakukan refleksi belajar.
2. Minta siswa untuk membuat ringkasan dari kegiatan belajar.
3. Periksa kesesuaian ringkasan yang dibuat siswa dengan materi.
4. Berikan soal tambahan untuk dikerjakan siswa jika dirasa perlu.
5. Berikan penilaian terhadap hasil karya siswa menggunakan rubrik penilaian.
6. Minta siswa untuk memberikan usulan perbaikan pembelajaran.

Latihan 1.3

1. Hitunglah determinan matriks berikut.

   a. $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ b. $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 7 \\ 5 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

2. Buatlah matrik ordo 2×2 yang mempunyai determinan 8.

3. Tentukan semua nilai p sehingga $\det(A) = 0$.

   a. $A = \begin{bmatrix} -5 & p+4 \\ p-2 & 1 \end{bmatrix}$ b. $A = \begin{bmatrix} p-2 & 4 & 0 \\ 2 & p & 0 \\ 0 & 0 & p-3 \end{bmatrix}$

4. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, |B| = -2$, dan $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & p \end{bmatrix}$. Jika $AB = C$ tentukanlah nilai dari $p^2 - 2p + 1$.

5. Matriks A adalah matriks 2×2. Matriks B adalah matriks yang diperoleh dengan menukarkan baris pertama dengan baris kedua pada matriks A. Apa hubungan antara $\det(A)$ dan $\det(B)$? Jelaskan.

6. Carilah semua x yang memenuhi $\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & x & -3 \\ 1 & 3 & x-2 \end{vmatrix}$.

7. Apa yang dapat Anda katakan mengenai determinan matriks 2 × 2 dan 3 × 3 yang semua elemenya adalah bilangan 1? Jelaskan alasan Anda.

Alternatif Penyelesaian Latihan 1.3

1. a. $\det(A) = -20$

   b. $\det(B) = 125$

2. Beberapa matriks yang mempunyai determinan 8 antara lain:

   $\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

3. a. $p = -3$ atau $p = 1$

   b. $p = 3$ atau $p = 4$ atau $p = -2$

4. $p^2 - 2p + 1 = 4$

   Petunjuk: gunakan sifat $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

5. $\det(A) = -\det(B)$

6. $x = \frac{1}{2}$ atau $x = 1$

7. mempunyai determinan 0

8. Mengapa determinan dari matriks 3 × 3 dengan salah satu baris yang semua elemennya nol adalah nol? Beri penjelasan.
9. Apa yang dapat Anda simpulkan mengenai determinan matriks 2 × 2 dan 3 × 3 yang mempunyai dua baris dengan elemen yang sama.
10. Tunjukkan bahwa $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$ (Howard Anton)

Pengayaan.

1. Diberikan matriks A dan B masing-masing berordo 2 × 2, tunjukkan bahwa det(AB) = det(BA).
2. Apakah matriks persegi berordo 3 × 3 yang memiliki determinan 0 selalu memuat suatu baris yang semua elemennya 0? Beri penjelasan.

Subbab 1.4 Invers Matriks

Pesan Bersandi

Dapatkah anda membaca pesan rahasia ini:

5 0 –6 8 –11 3 0 7 8 7 7 13

Mungkin anda berpikir ini hanya sebuah kumpulan bilangan. Bagaimana jika anda diberi tahu kode sandi dari pesan tersebut, yakni:

-	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	-5	6	-6	7	-7
O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z			
8	-8	9	-9	10	-10	11	-11	12	-12	13	-13			

Alternatif Penyelesaian Latihan 1.3

8. Petunjuk:

   pecah menjadi tiga kasus.

   Kasus 1, baris 1 semua elemennya 0.

   Kasus 2, baris 2 semua elemennya 0.

   Kasus 3, baris 3 semua elemennya 0.

   Gunakan kaidah sarus.
9. mempunyai determinan 0
10. Petunjuk: gunakan kaidah Sarrus untuk menentukan determinan.

Jawaban Soal Pengayaan

1. det(AB) = det(A)· det(B) = det(B)· det(A) = det(BA)
2. Tidak. Karena ada matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ dengan det(A) = 0 tetapi matriks

   A tidak memuat baris yang semua elemennya 0.

Kegiatan Sebelum Pembelajaran

- Minta siswa untuk mengingat kembali tetang invers perkalian bilangan dan identitas perkalian bilangan.
- Ajak siswa untuk mengamati masalah Pesan Bersandi yang merupakan salah satu aplikasi matriks yang mempunyai invers. Ajak siswa untuk mendiskusikan sejenak matriks seperti apa yang dapat digunakan dalam proses pengolahan pesan tersebut (tidak harus terselesaikan).

Anda akan dengan mudah membaca pesannya, yakni:

5	0	–6	8	–11	3	0	7	8	7	7	13
I	-	L	O	V	E	-	M	O	M	M	Y

Jadi, jika kode sandi tersebut bocor ke orang yang tidak berhak, pesan akan mudah dibaca. Mungkin anda akan berpikir tentang bagaimana cara meningkatkan pengamanan pesan rahasia agar lebih sulit diketahui orang yang tidak berhak?

Konsep matriks yang sudah anda pelajari sebelumnya dapat diterapkan untuk menambah pengamanan. Hal yang dapat dilakukan adalah menyatakan pesan tersebut dalam bentuk matriks, misalnya menjadi matriks berordo 6×2:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \\ -6 & 8 \\ 8 & 7 \\ -11 & 7 \\ 3 & 13 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya matriks tersebut dikalikan dengan matriks persegi berordo 2×2 sebagai ***kode sandi tambahan***, sehingga hasil perkalian matriksnya menjadi:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \\ -6 & 8 \\ 8 & 7 \\ -11 & 7 \\ 3 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 15 \\ 21 & 14 \\ -6 & -2 \\ 61 & 38 \\ -34 & -19 \\ 54 & 35 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian, pesan yang dikirim menjadi

25 21 –6 61 -34 54 15 14 -2 38 -19 35

sehingga meski ada yang mengetahui kode sandi pertama, orang tersebut belum dapat membaca pesan tersebut.

Pengirim pesan cukup memberitahukan matriks $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ yang digunakannya untuk mengamankan pesan kepada orang yang dituju. Dengan menggunakan matriks kode sandinya, penerima pesan akan mendapatkan ***matriks baru***, yakni $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$, yang selanjutnya dapat digunakan untuk membuka pesannya.

Pesan yang diterima diproses seperti berikut:

$$\begin{bmatrix} 25 & 15 \\ 21 & 14 \\ -6 & -2 \\ 61 & 38 \\ -34 & -19 \\ 54 & 35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \\ -6 & 8 \\ 8 & 7 \\ -11 & 7 \\ 3 & 13 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian, pesan aslinya dapat diketahui, yaitu 5 0 -6 8 -11 3 0 7 8 7 7 13. Selanjutnya, dengan menggunakan table kode sandi, pesan dapat dibaca yaitu: I LOVE MOMMY.

Ilustrasi pengiriman pesan bersandi

P → *E* Enkripsi → B → *D* Dekripsi → P

Misalkan

P : pesan awal yang sudah dirubah dalam bentuk matriks

E : matriks enskripsi yang digunakan untuk mengamankan pesan

B : pesan baru yang sudah diamankan setelah di kalikan matriks bersandi

D : matriks dekripsi yang digunakan untuk membuka matriks menjadi matriks awal .

Sehingga dapat dituliskan dalam bentuk persamaan:

$PE = B$

$BD = P$

Setelah pesan dirubah dalam bilangan dengan menggunakan kode sandi awal dan dituliskan dalam bentuk matriks (P), anda bisa menambahkan pengamanan lebih lanjut menggunakan kode sandi tambahan dengan format matriks. Pertanyaan yang menarik adalah matriks E seperti apa yang dapat digunakan sebagai alat untuk mengamankan pesan? Bagaimana cara mendapatkan ***matriks baru*** (D) yang digunakan untuk membuka pesan yang diterima (B) jika diberikan matriks E pengamannya?

Keterangan: matriks E adalah ***matriks yang memiliki invers*** dan matriks E adalah ***invers matriks*** dari matriks D.

Kegiatan 1.4.1 Mengekplorasi Invers Matriks

Amati fakta-fakta hasil perkalian bilangan berikut:

$$2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$\frac{1}{2} \times 2 = 1$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1$$

Masih ingatkah anda tentang sifat-sifat operasi perkalian bilangan real? Bilangan 1 dalam kaitannya dengan sifat-sifat operasi perkalian bilangan real disebut unsur identitas (apa karakteristik dari unsur identitas dalam operasi perkalian? Dari fakta perkalian di atas, bisa kita katakan bahwa 2 adalah balikan/invers kali $\frac{1}{2}$ dan sebaliknya. Begitu juga $\frac{2}{3}$ adalah invers kali $\frac{3}{2}$

Ayo Mengamati

- Ajak siswa mengamati fakta-fakta hasil perkalian antara bilangan dan inversnya dan hubungannya dengan invers matriks.
- Minta siswa melengkapi tabel mengenai hubungan matriks, determinan, dan invers matriks.

dan sebaliknya, Mengapa? Adakah bilangan real yang tidak memiliki invers terhadap operasi perkalian? Berikan alasannya.

Selanjutnya, amatilah fakta-fakta hasil perkalian matriks-matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 5 & -1 \\ -2 & 11 & 7 \\ 1 & -5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -57 & 5 & -46 \\ -11 & 1 & -9 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -57 & 5 & -46 \\ -11 & 1 & -9 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 5 & -1 \\ -2 & 11 & 7 \\ 1 & -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya perhatikan istilah-istilah yang digunakan dalam kalimat-kalimat berikut:

a. Matriks $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ disebut ***invers matriks*** $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ dan *invers matriks* matriks A **ditulis** A^{-1}

b. Matriks $\begin{bmatrix} -57 & 5 & -46 \\ -11 & 1 & -9 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ disebut *invers matriks* matriks $B = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -1 \\ -2 & 11 & 7 \\ 1 & -5 & 2 \end{bmatrix}$ dan *invers matriks* matriks B ditulis B^{-1}.

c. Seperti yang sudah dibahas di kelas XI, matriks $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

disebut *matriks identitas*, ditulis I. Apakah matriks identitas merupakan matriks persegi?

Berdasarkan fakta-fakta perkalian matriks-matriks serta istilah invers matriks, tuliskan hubungan antara matriks A, A^{-1} dan matriks identitas I?

Dengan menggunakan pengetahuan dalam menentukan determinan matriks yang sudah dibahas pada subbab sebelumnya, akan didapat nilai determinan tiap-tiap matriks tersebut sebagai berikut:

a. $$\det\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = (5\cdot 2)-(3\cdot 3)=1$$

$$\det\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = (2\cdot 5)-(-3\cdot -3)=1$$

b. $$\det\begin{bmatrix} -1 & 5 & -1 \\ -2 & 11 & 7 \\ 1 & -5 & 2 \end{bmatrix} = -1$$

$$\det\begin{bmatrix} -57 & 5 & -46 \\ -11 & 1 & -9 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -1$$

Amati serta lengkapi informasi yang belum lengkap pada tabel berikut ini:

Tabel 1. 1 informasi matriks terkait ukuran, determinannya dan keberadaan invers matriksnya

No	Matriks	Ukuran	Determinan	Keterangan
1	$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$	2×3	Tidak memiliki nilai determinan	Tidak memiliki invers
2	$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$	...	-2	Memiliki invers
3	$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$	...	...	Tidak memiliki invers

Berdasarkan hasil pengamatan yang sudah anda lakukan, coba anda buat minimal 3 pertanyaan lain tentang invers. Upayakan pertanyaan yang anda buat memuat kata-kata “matriks persegi”, “determinan matriks”, “bukan matriks persegi”, “matriks identitas”, “memiliki invers”, dan “invers matriks”.

Petunjuk: kalian bisa lebih fokus pada keterkaitan antara matriks-matriks yang memiliki inversnya dengan nilai determinan dari matriks tersebut, ukuran dari matriks-matriks yang memiliki invers serta hubungan antara matriks dengan invers matriksnya.

dan
Dari sekian banyak pertanyaan yang anda buat, mungkin ada diantaranya pertanyaan-pertanyaan berikut:

1. Apa semua matriks mempunyai invers matriks?
2. Bagaimana ciri-ciri matriks yang memiliki invers matriks?
3. Apa semua matriks persegi mempunyai invers matriks?
4. Apa hubungan matriks dengan invers matriksnya?

Alternatif Penyelesaian
Tabel 1.1

No	Matriks	Ukuran	Determinan
1	$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$	2×3	Tidak memiliki nilai determinan
2	$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$	2×2	-2
3	$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$	2×2	0

Minta siswa untuk membuat beberapa pertanyaan mengenai informasi yang didapatkan dari hasil pengamatan tentang invers matriks.

Contoh pertanyaan:

Apakah ciri-ciri matriks yang memiliki invers?

dan

1. Minta siswa mengamati kembali pertanyaan-pertanyaan yang sudah dibuat.
2. Minta siswa membuat dugaan jawaban dari pertanyaan-pertanyaan tersebut dengan menggunakan wawasan yang dikuasai dan beberapa contoh yang diberikan.
3. Minta siswa melengkapi tabel dan menjawab pertanyaan-pertanyaan yang disediakan.

Untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan tersebut perhatikan fakta-fakta matematika terkait matriks, operasi perkalian pada matriks, determinan matriks sebelumnya.

Untuk dapat menjawab pertanyaan-pertanyaan yang anda buat, anda harus melakukan aktivitas menalar dengan melengkapi informasi yang diberikan. Untuk memperkaya informasi anda, perhatikan dan lengkapi informasi pada tabel berikut:

Tabel 1. 2

No	Matriks	Ukuran/ Ordo	Nilai Determinan	Keterangan
1	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$	2×3	Tidak punya	Tidak memiliki invers
2	$\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$	...	...	Tidak memiliki invers
3	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$	2×2	Tidak punya	Tidak memiliki invers
4	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$	...	0	Tidak memiliki invers
5	$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$	...	...	Tidak memiliki invers
6	$\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$	...	...	Memiliki invers

Alternatif Penyelesaian

Tabel 1.2

No	Matriks	Ukuran/ Ordo	Nilai Determinan	Keterangan
2	$\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$	3×2	Tidak memiliki determinan	Tidak memiliki invers
4	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$	2×2	0	Tidak memiliki invers
5	$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$	2×2	0	Tidak memiliki invers
6	$\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$	2×2	-2	Memiliki invers

Selanjutnya, perhatikan dan lengkapi informasi tentang hubungan antara matriks dan invers matriksnya pada tabel berikut:

Tabel 1. 3

No	Matriks A	Invers matriks (A^{-1})	AA^{-1}	$A^{-1}A$
1	$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -1 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$	...	...
2	$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$	...	...
3	$\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$	...	...
4	$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$	...	...

Berdasarkan tabel tersebut, buatlah kesimpulan terkait:

1. Ciri-ciri matriks yang memiliki invers?
2. Apa syarat untuk matriks persegi yang memiliki invers?
3. Jika matriks memiliki invers matriks, apa hubungan yang berlaku antara matriks dan invers matriksnya?

Selanjutnya, perhatikan pasangan-pasangan matriks dan invers matriksnya, kemudian jawablah pertanyaan yang menyertainya.

1. Matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ dan invers matriks $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Kesimpulan terkait matriks yang memiliki invers matriks:

1. *Merupakan matriks persegi*
2. *Hanya matriks persegi dengan nilai determinannya tidak sama dengan nol yang memeliki invers matriks*
3. *Matriks B dikatakan invers matriks A jika memenuhi persamaan:*

   $AB = BA = I.$

Alternatif Penyelesaian

Tabel 1.3

No	Matriks A	AA^{-1}	$A^{-1}A$
1	$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Alternatif Jawaban

1. a. 2 dan $\frac{1}{2}$

   b. $\frac{1}{2}$ dan 2

   c. 1

2. a. 6 dan $\frac{1}{6}$

   b. $\frac{1}{6}$ dan 6

   c. 1

Hubungan nilai determinan matriks dengan determinan invers matriksnya:

$$\det(A) = \frac{1}{\det(A^{-1})}$$

atau

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Lengkapi informasi ini dengan menentukan:

a. $\det(A)$ dan $\det(A^{-1})$

b. $\frac{1}{\det(A)}$ dan $\frac{1}{\det(A^{-1})}$

c. $\det(A)\cdot\det(A^{-1})$

2. Matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ dan matriks $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -1 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

   Lengkapi informasi ini dengan menentukan :

   a. $\det(A)$ dan $\det(A^{-1})$

   b. $\frac{1}{\det(A)}$ dan $\frac{1}{\det(A^{-1})}$

   c. $\det(A)\cdot\det(A^{-1})$

Sekarang, tuliskan kesimpulan awal atau dugaan awal tentang hubungan *determinan matriks* dan *determinan inversnya*

Kesimpulan tersebut digunakan untuk menyelesaiakan Contoh dan juga sebagai bahan untuk anda diskusikan dengan siswa/kelompok lainnya.

Contoh 1.24

Berdasarkan hasil bernalar anda, jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut ini:

1. Apakah matriks-matriks berikut ini memiliki invers, berikan alasannya.

a. $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$

Alternatif Penyelesaian Contoh 1.24

1. a. Tidak memiliki, karena bukan matriks persegi

   b. Iya, karena matriks persegi dan det nya tidak sama dengan nol

   c. Iya, karena matriks persegi dan det nya tidak sama dengan nol

   d. Tidak, karena nilai determinannya sama dengan nol

2. Tetapkan apakah pasangan-pasangan matriks berikut merupakan pasangan matriks dengan invers matriksnya! Berikan alasanya.

   a. $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$

   b. $C=\begin{bmatrix}3 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}5 & -3\\ -4 & 3\end{bmatrix}$

   c. $E=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, F=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

   d. $G=\begin{bmatrix}-6 & 5\\ -3 & 3\end{bmatrix}, H=\begin{bmatrix}2 & \frac{1}{3}\\ 13 & 2\end{bmatrix}$

3. Diberikan matriks $M=\begin{bmatrix}4 & 5\\ 4 & 6\end{bmatrix}$ dan invers matriksnya $M^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{5}{4}\\ -1 & a\end{bmatrix}$, tentukan nilai a.

4. Diketahui matriks $A=\begin{bmatrix}2 & -3\\ x & -2\end{bmatrix}$ memiliki invers matriks A^{-1} dan nilai $\det(A^{-1})=2$, tentukan nilai x.

Tuliskanlah kesimpulan yang anda dapatkan terkait ciri-ciri matriks yang memiliki invers dan sifat-sifat invers matriks.
Pertukarkan tulisan tersebut dengan teman sebangku/kelompok lainnya. Secara santun, silahkan saling berkomentar, menanggapi komentar, memberikan usul dan menyepakati ide-ide yang paling tepat.

Alternatif Jawaban

2. a. Iya, karena $AB = I$
   b. Bukan karena $CD \neq \mathrm{I}$
   c. bukan karena $EF \neq \mathrm{I}$
   d. bukan karena $GH \neq \mathrm{I}$
3. $a = 1$
4. $x = \frac{3}{2}$

Kegiatan 1.4.2 Menentukan Invers Matriks

Berdasarkan hasil aktivitas sebelumnya, Anda tentu sudah memperoleh temuan/kesimpulan tentang salah-satu karakteristik dari invers matriks, yakni:

Jika matriks A memiliki invers A^{-1}, maka akan berlaku $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

Sedangkan pada subbab determinan yang Anda pelajari sebelumnya, Anda telah mengamati hubungan antara determinan hasil kali dua matriks dengan determinan masing-masing matriks. Jika A dan B adalah dua matriks persegi, maka

$$\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$$

Berdasarkan sifat determinan hasil kali matriks tersebut tentu Anda bisa menggunakannya untuk mengamati hubungan determinan matriks yang memiliki invers dan determinan inversnya.

Karena $A \cdot A^{-1} = I$, maka berdasarkan sifat di atas akan didapatkan

$$\det(A) \times \det(A^{-1}) = \det(I) = 1$$

Sehingga akan didapatkan hubungan antara determinan suatu matriks dengan determinan inversnya, yaitu

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Dengan mengamati hubungan kedua determinan di atas, Anda mungkin dapat mengamati syarat matriks A mempunyai invers berdasarkan nilai determinannya. Mungkinkah matriks A mempunyai invers jika determinannya bernilai nol?

Mungkin pertanyaan Anda selanjutnya adalah bagaimana cara menentukan invers dari suatu matriks A?

Ajak siswa mengamati bentuk invers dari matriks yang diberikan dalam contoh serta minta siswa melengkapi tabel yang disediakan.

Dengan demikian, anda tentu akan mencari matriks yang memenuhi kriteria matriks invers, yakni jika matriks dikalikan dengan inversnya, maka akan menghasilkan matriks identitas (I) dan sebaliknya.

Untuk lebih menguatkan kesimpulan sementara Anda tentang invers matriks dan sifat-sifatnya serta untuk mendapatkan gambaran bagaimana mencari invers suatu matriks, perhatikan contoh berikut.

Matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ dengan det(A) = 2 mempunyai invers $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$ dengan $\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{2}$

Perhatikan contoh-contoh lainnya untuk matriks berukuran 2×2 yang diberikan dalam tabel berikut dan lengkapi informasi yang dibutuhkan.

Tabel 1.4. Hubungan matriks dan inversnya

NO	Matriks A	det(A)	Matriks Invers A^{-1}	det(A^{-1})	$A\,A^{-1}$
1	$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$	4	$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{4}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$	10	$\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{10}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$	–9	$-\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$	$-\frac{1}{9}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$	...	$\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$	...	...

Ayo Menanya

Minta siswa untuk membuat beberapa pertanyaan mengenai informasi yang didapatkan dari hasil pengamatan tentang matriks invers.

Contoh pertanyaan:

Bagaimana menentukan invers dari suatu matriks?

Minta siswa secara bergantian menuliskan matriks yang mempunyai invers di papan tulis.

Kemudian tuliskanlah invers dari masing-masing matriks yang sudah dibuat.

Dengan demikian,siswa diharapkan mengenali bentuk umum matriks invers.

NO	Matriks A	det(A)	Matriks Invers A^{-1}	det(A^{-1})	$A\,A^{-1}$
5	$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$	...	$-\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -8 & 5 \end{bmatrix}$	...	...
6	$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$	...	...	...	...
7	$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$	...	...	...	...
8	$\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$	...	...	...	...

Jika diamati pada kolom matriks invers, invers dari matriks yang berukuran 2×2 juga mempunyai ukuran yang sama (mengapa?).

Berdasarkan pengamatan diatas, coba Anda buat minimal 3 pertanyaan lain tentang invers. Upayakan pertanyaan yang Anda buat memuat kata-kata “invers matriks”, “determinan”.

Dari sekian banyak pertanyaan yang Anda buat, mungkin ada diantaranya pertanyaan-pertanyaan berikut:

1. Adakah kesamaan bentuk matriks invers dari masing-masing matriks?
2. Apa kaitan antara matriks invers dan determinannya?
3. Bisakah kita menurunkan rumus mencari invers suatu matriks?

Untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan tersebut, lakukanlah kegiatan berikut.

Alternatif Penyelesaian

Tabel 1.4

NO	Matriks A	det(A)	Matriks Invers A^{-1}	det(A^{-1})	$A\,A^{-1}$
4	$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$	6	$\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{6}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
5	$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$	-11	$-\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -8 & 5 \end{bmatrix}$	$-\frac{1}{11}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
6	$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$	-11	$-\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$	$-\frac{1}{11}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
7	$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$	-8	$-\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$	$-\frac{1}{8}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
8	$\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$	-26	$-\frac{1}{26}\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$	$-\frac{1}{26}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Coba Anda buat matriks-matriks lainnya yang mempunyai invers dan tuliskan di papan tulis. Lengkapi matriks-matriks tersebut dengan nilai determinan masing-masing. Guru Anda akan menuliskan invers dari masing-masing matriks yang sudah dituliskan.

Anda sudah mengumpulkan contoh-contoh matriks yang mempunyai invers sekaligus matriks invers dan determinannya. Pertanyaan selanjutnya yang harus dijawab adalah bagaimana mencari invers suatu matriks jika sudah diketahui sebelumnya bahwa determinan matriks tersebut tidak nol? Berdasarkan tabel 1.4, coba Anda lakukan kegiatan berikut.

(a) Amati kembali kolom matriks dan inversnya. Adakah hubungan antara unsur-unsur pada matriks awal dan unsur-unsur pada matriks invers?
(b) Perhatikan kembali kolom matriks invers. Adakah kesamaan bentuk antara matriks invers yang satu dengan lainnya?
(c) Perhatikan pula kedua kolom determinan. Apa yang bisa Anda simpulkan hubungan antara determinan matriks dan determinan inversnya?

Tuliskan analisa Anda terhadap pertanyaan-pertanyaan di atas di buku Anda. Kemudian, amati kembali bagaimana Anda bisa dapatkan invers dari suatu matriks yang determinannya tidak nol.

Untuk lebih jelasnya, untuk matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dengan $\det(A) \neq 0$ maka inversnya adalah…

Coba cek hasil yang Anda dapatkan dengan cara mengalikannya dengan matriks asal, yaitu $A \cdot A^{-1}$ dan $A^{-1} \cdot A$. Apakah yang Anda dapatkan?

Bagi siswa yang kreatif dan mempunyai keingintahuan yang tinggi mungkin akan timbul pertanyaan "A*dakah cara lain menentukan invers suatu matriks?*"

Ajak siswa menelaah beberapa metode yang digunakan untuk mencari invers suatu matriks dengan menjawab beberapa pertanyaan yang sudah disediakan.

Minta beberapa siswa untuk mempresentasikan di depan kelas dan siswa lainnya untuk menanggapi dan berdiskusi.

Alternatif Penyelesaian — Ayo Menalar

(a) Unsur-unsur pada matriks invers diambil dari unsur-unsur matriks awal, yaitu dengan membalik urutan diagonal utama dan menegatifkan unsur lainnya.
(b) Terdapat kesamaan bentuk antara invers yang satu dengan lainnya.
(c) Determinan matriks invers merupakan kebalikan (*reciprocal*) dari determinan matriks awal. Determinan matriks awal dikalikan determinan matriks invers menghasilkan 1.

Jika $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\det(A) \neq 0$ maka $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Perkalian matriks A dan A^{-1} akan menghasilkan matriks identitas.

Untuk membantu menjawab pertanyaan tersebut, mari kita lakukan kegiatan berikut. Kita misalkan matriks yang akan kita cari inversnya adalah $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Sebelum mencari inversnya, apakah syarat agar A mempunyai matriks invers? Kemudian, kita misalkan matriks inversnya adalah $A^{-1}=\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$. Berdasarkan informasi yang Anda dapatkan sebelumnya, hubungan antara matriks dan inversnya adalah $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$. Selanjutnya, jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut.

(a) Jika Anda gunakan fakta bahwa $A\cdot A^{-1}=I$, apakah yang Anda dapatkan?
(b) Dari sistem persamaan tersebut, selesaikan untuk masing-masing $w, x, y,$ dan z dalam bentuk $a, b, c,$ dan d.
(c) Apakah matriks invers yang Anda dapatkan hasilnya sama dengan matriks invers dari kegiatan sebelumnya?

Sekarang Anda tentu sudah mendapatkan kesimpulan mengenai bagaimana mencari invers suatu matriks berukuran 2×2. Lalu bagaimana dengan invers matriks yang berukuran 3×3?

Untuk mengetahui proses mencari invers matriks berukuran 3×3, kita perhatikan kasus matriks ukuran 2×2 terlebih dahulu untuk mendapat gambaran invers matriks yang berukuran lebih besar.

Sebelumnya, amatilah proses mengutak-atik matriks yang merupakan invers matriks: Dari contoh sebelumnya diketahui bahwa matriks $A=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ mempunyai invers matriks $A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$.

Mari kita eksplorasi matriks inversnya,

Alternatif Penyelesaian

Ayo Menalar

(a.) Jika $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $A^{-1}=\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$, dengan menggunakan fakta bahwa $AA^{-1}=I$, maka akan menghasilkan sistem persamaan linear dua variabel.

(b) Dari SPLDV yang sudah didapatkan, maka

$$w=\frac{d}{ad-bc},\ x=\frac{-b}{ad-bc},\ y=\frac{-c}{ad-bc},\ z=\frac{a}{ad-bc}$$

(c) Matriks invers yang dihasilkan sama dengan matriks invers yang didapatkan dengan metode sebelumnya, yaitu

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} (-1)^2 \cdot 5 & (-1)^3 \cdot 3 \\ (-1)^3 \cdot 6 & (-1)^4 \cdot 4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(4\times5)-(6\times3)}\begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \cdot 5 & (-1)^{2+1} \cdot 3 \\ (-1)^{2+1} \cdot 6 & (-1)^{2+2} \cdot 4 \end{bmatrix}$$

Sekarang perhatian kita fokuskan pada:

$$= \frac{1}{(4\times5)-(6\times3)}\begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \cdot 5 & (-1)^{2+1} \cdot 3 \\ (-1)^{2+1} \cdot 6 & (-1)^{2+2} \cdot 4 \end{bmatrix}$$

Untuk membantu proses penalaran Anda, cobalah jawab pertanyaan berikut:

1. Apa makna nilai (4 × 5) – (6 × 3) bila dikaitkan dengan matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$?

2. Matriks $\begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \cdot 5 & (-1)^{2+1} \cdot 3 \\ (-1)^{2+1} \cdot 6 & (-1)^{2+2} \cdot 4 \end{bmatrix}$ selanjutnya disebut sebagai ***Matriks Adjoin***,

   bagaiamana mendapatkan matriks adjoin?

Bila kita perhatikan Matriks Adjoin $\begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \cdot 5 & (-1)^{2+1} \cdot 3 \\ (-1)^{2+1} \cdot 6 & (-1)^{2+2} \cdot 4 \end{bmatrix}$, berasal dari transpos suatu matriks, yakni matriks $\begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \cdot 5 & (-1)^{2+1} \cdot 6 \\ (-1)^{2+1} \cdot 3 & (-1)^{2+2} \cdot 4 \end{bmatrix}$. Masih ingatkah Anda bahwa matriks $\begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \cdot 5 & (-1)^{2+1} \cdot 6 \\ (-1)^{2+1} \cdot 3 & (-1)^{2+2} \cdot 4 \end{bmatrix}$ adalah ***Matriks Kofaktor*** yang sudah dibahas pada subbab determinan?

Dengan demikian, jika matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ mempunyai matriks kofaktor

$C(A) = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \cdot 5 & (-1)^{2+1} \cdot 6 \\ (-1)^{2+1} \cdot 3 & (-1)^{2+2} \cdot 4 \end{bmatrix}$, maka Adjoinnya adalah transpos matriks kofaktor dan dinotasikan dengan $C(A)^t$.

Secara umum, jika $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ maka kofaktornya adalah $C(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$.

Sehingga matriks adjoin dari A adalah $Adj(A) = C(A)^t = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix}$.

Pada subbab determinan sudah dibahas sebelumnya mengenai definisi determinan matriks berdasarkan kofaktornya. Ingat bahwa

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12}$$

atau

$$\det(A) = a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22}$$

Namun demikian, coba Anda periksa hasil dari $a_{11}C_{21} + a_{12}C_{22}$ dan $a_{21}C_{11} + a_{22}C_{12}$. Apakah yang Anda dapatkan?

Berdasarkan hasil yang Anda peroleh di atas, apa yang Anda dapatkan jika matriks A dikalikan dengan Adjoinnya?

$$\boldsymbol{A \times Adj(A) = \cdots}$$

Serupa dengan matriks berukuran 2×2, coba Anda cek hasil kali matriks berukuran 3×3 dengan Adjoinnya dengan mengambil satu contoh matriks berukuran 3×3. Untuk lebih memudahkan perhitungan Anda, Anda dapat menghitung hasil operasi berikut ini.

Alternatif Penyelesaian

$$a_{11}C_{21} + a_{12}C_{22} = 0$$

$$a_{21}C_{11} + a_{22}C_{12} = 0$$

$$A \times Adj(A) = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 \\ 0 & \det(A) \end{bmatrix}$$

$$= \det(A) \times I$$

$$a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} = ...$$

$$a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23} = ...$$

$$a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33} = ...$$

$$a_{11}C_{21} + a_{12}C_{22} + a_{13}C_{23} = ...$$

$$a_{11}C_{31} + a_{12}C_{32} + a_{13}C_{33} = ...$$

dan seterusnya.

Jika $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$ adalah sebarang matriks berukuran 3×3, dapatkan Anda membuat kesimpulan mengenai hubungan matriks B dengan $adj(B)$?

Berdasarkan uraian tersebut, buat kesimpulan terkait bagaimana menentukan invers dari

a. ***Matriks persegi berordo* 2×2**

Jika matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ memiliki invers, invers matriksnya adalah $A^{-1} = ...$

b. ***Matriks persegi berordo* 3×3**

Jika matriks $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$ memiliki invers, invers matriksnya adalah $B^{-1} = ...$

Cek hasil yang Anda dapatkan dengan cara mengalikan matriks dengan inversnya. Matriks apakah yang Anda peroleh?

Khusus untuk matriks berordo 2×2, adakah strategi paling cepat dalam menentukan invers matriks? Jika iya, bagaimana strateginya?

Alternatif Penyelesaian

a. $A^{-1} = \dfrac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$

b. $B^{-1} = \dfrac{1}{\det(B)} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}$, dengan C_{ij} adalah kofaktor baris ke-i kolom ke-j.

Dapat dituliskan $B^{-1} = \dfrac{1}{\det(B)} \times adj(B)$

Alternatif Penyelesaian
Contoh 1.25

a. Tidak mempunyai invers karena matriksnya tidak mempunyai determinan (bukan matriks persegi).

b. Memiliki invers karena determinan tidak nol. Inversnya adalah $-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

c. Tidak mempunyai invers karena determinannya nol.

d. Memiliki invers dengan inversnya adalah
$$\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 22 & 2 & -16 \\ -13 & 1 & 10 \\ -34 & -2 & 28 \end{bmatrix}$$

Contoh 1.25

Berdasarkan hasil bernalar Anda, apakah matriks-matriks tersebut memiliki invers? Berikan alasannya. Selanjutnya jika memiliki invers, tentukan inversnya.

a. $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 6 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$ **c.** $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$ **d.** $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 6 & -1 \\ 5 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

Contoh 1.26

Jika diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$,

a. Tentukan syarat agar matriks A mempunyai invers?
b. Bila matriks tersebut memenuhi syarat memilki invers, tentukan inversnya A^{-1}?
c. Karena invers dari suatu matriks juga merupakan matriks, bagaimana dengan nilai determinan dari inversnya?

Tuliskanlah kesimpulan yang Anda dapatkan terkait:

a. *Menentukan invers matriks berukuran* 2×2.
b. *Menentukan invers matriks berukuran* 3×3.

Pertukarkan tulisan tersebut dengan teman sebangku/kelompok lainnya. Secara santun, silahkan saling berkomentar, menanggapi komentar, memberikan usul dan menyepakati ide-ide yang paling tepat.

Alternatif Penyelesaian
Contoh 1.26

a. Matriks A mempunyai invers jika determinannya tidak nol, yaitu $ad - bc \neq 0$

b. Invers dari matriks A adalah $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

c. Determinan dari matriks invers adalah kebalikan dari determinan matriks awal, yaitu perkalian antara determinan matriks awal dengan determinan matriks inversnya menghasilkan 1,
$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{ad-bc}$$

Ayo Mengomunikasikan

Minta siswa untuk menuliskan kesimpulan yang didapatkan matriks invers dan bagaimana menentukan invers suatu matriks. Kemudian minta beberapa siswa mempresentasikan hasil masing-masing di depan kelas dan selanjutnya dibahas. Minta siswa lainnya untuk ikut menyempurnakan kesimpulan yang dibuat.

Latihan 1.4

1. Tentukan invers matriks berikut. a. $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ b. $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 7 \\ 5 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

2. Buatlah matriks A berordo 2×2 yang memiliki invers matriks $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

3. Gunakan matriks persegi B dengan $\det(B) \neq 0$ untuk menunjukkan bahwa
   a. $(B^{-1})^{-1} = B$
   b. $(B^{t})^{-1} = (B^{-1})^{t}$

4. Selidiki bahwa $\det\left(K^n\right) = \left(\det K\right)^n$, untuk matriks;

   a. $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ dengan $n = 4$ b. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{bmatrix}$ dengan $n = 2$

   Catatan: Didefinisikan $K^n = K \times K^{n-1}, n \geq 2$.

5. Jika semua elemen pada salah satu baris matriks persegi adalah nol. Apakah matriks tersebut memiliki invers? Mengapa?

6. Jika matriks persegi $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dengan $a, b, c,$ dan d adalah bilangan bulat, tentukan semua kemungkinan matriks A yang memenuhi persamaan $A^2 = I$.

7. Adakah suatu matriks yang inversnya adalah diri sendiri?

8. Apa beda soal nomor 6 dan soal nomor 7?

Alternatif Penyelesaian
Latihan 1.4

1. $A^{-1} = -\frac{1}{20}\begin{bmatrix} 0 & -5 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$

   $B^{-1} = \frac{1}{125}\begin{bmatrix} 5 & 21 & -7 \\ 5 & -4 & 43 \\ 15 & -12 & 4 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \frac{3}{2} & -2 \end{bmatrix}$

3. Gunakan matriks yang mempunyai invers, sebagai contoh $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$.

4. a. $A^4 = \begin{bmatrix} 373 & 52 \\ 156 & 61 \end{bmatrix}$

   $\det(A^4) = 14.641$
   $(\det(A))^4 = 14.641$

   b. $A^2 = \begin{bmatrix} 18 & -13 & 20 \\ 24 & -9 & 35 \\ 37 & -29 & 39 \end{bmatrix}$

   $\det(A^2) = 25$, $\det(A) = -5$

5. Tidak memiliki invers karena determinannya bernilai nol.

6. Jika diketahui $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, maka

   dari $A^2 = I$ didapatkan sistem persamaan

   $$\begin{cases} a^2 + bc = 1 \\ b(a+d) = 0 \\ c(a+d) = 0 \\ bc + d^2 = 1 \end{cases}$$

   Dari $b(a + d) = 0$ didapatkan $b = 0$ atau $a + d = 0$.
   Jika $b = 0$, maka $c = 0$, $a = \pm 1$, $d = \pm 1$.
   Jika $a + d = 0$, maka kita pilih pasangan bilangan bulat a dan d yang jumlahnya nol, kemudian kita cari nilai b dan c yang juga bulat. Sebagai contoh jika $a = 2$ maka $d = -2$. Dari $a^2 + bc = 1$ dan $bc + d^2 = 1$ didapatkan $bc = -3$. Kita pilih $b = -1$, $c = 3$ atau $b = 1$, $c = -3$.

   Kita dapatkan matriks $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

   dan $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$. Jika $a = -2$, $d = 2$

   didapatkan matriks $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ dan

   $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$. Dengan demikian akan terdapat tak hingga banyak matriks dengan entri bilangan bulat yang memenuhi $A^2 = I$.

7. Berdasarkan soal nomor 6, terdapat tak hingga banyak matriks yang inversnya adalah dirinya sendiri.

8. Soal nomor 6 hanya melibatkan matriks yang entri-entrinya bilangan bulat, sedangkan nomor 7 melibatkan semua matriks yang inversnya adalah diri sendiri termasuk yang entri-entrinya tidak bulat. Sebagai contoh matriks

   $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 3 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ yang didapatkan dari

   $a = \frac{1}{2}$, $d = -\frac{1}{2}$.

Pengayaan

9. Diketahui A dan B adalah matriks 2x2 dan keduanya memiliki invers. Selidiki apakah berlaku:

   a. $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

   b. $A^{-1}B^{-1} = (BA)^{-1}$

10. Misalkan A matriks 2×2 yang memiliki invers. Buktikan bahwa $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

Subbab 1.5 Menyelesaikan Masalah Menggunakan Matriks

Anda telah mempelajari materi tentang penentuan invers dari suatu matriks pada subbab sebelumnya. Ternyata materi tersebut sangat bermanfaat, yaitu sebagai salah satu cara untuk menyelesaikan sistem persamaan linear. Bagaimana matriks invers dapat dijadikan alternatif untuk menyelesaikan sistem persamaan linear? Untuk dapat menjawabnya, Anda perlu mempelajari dan melakukan kegiatan-kegiatan yang terdapat pada subbab ini.

Kegiatan 1.5.1 Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear (SPL)

Pada suatu tempat parkir terdapat 84 kendaraan yang terdiri atas sepeda motor dan mobil. Setelah dihitung jumlah roda seluruhnya adalah 220. Berapakah banyaknya tiap-tiap sepeda motor dan mobil di tempat parkir tersebut?

Permasalahan tersebut merupakan permasalahan pada sistem persamaan linear. Jika x adalah banyaknya sepeda motor dan y adalah banyaknya mobil, maka dapat dibuat dua persamaan linear berikut.

Kegiatan Sebelum Pembelajaran

1. Ingatkan kembali siswa tentang materi sistem persamaan linear dan penyelesaiannya yang telah diperoleh pada waktu SMP.

2. Ajak siswa untuk mendiskusikan sejenak Contoh 1.27 dan jika memungkinkan minta mereka untuk menyelesaikannya.

Jawaban Pengayaan

9.a. tidak berlaku, ambil contoh kontra misalnya

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

b. Berlaku, perhatikan bahwa berdasarkan sifat matriks identitas dan sifat asosiatif perkalian didapatkan

$$(BA)^{-1} = (BA)^{-1} \times I$$
$$= (BA)^{-1} \times B \times B^{-1}$$
$$= (BA)^{-1} \times B \times I \times B^{-1}$$
$$= (BA)^{-1} \times B \times A \times A^{-1} \times B^{-1}$$
$$= (BA)^{-1} \times (BA) \times (A^{-1}B^{-1})$$
$$= I \times (A^{-1}B^{-1})$$
$$= (A^{-1}B^{-1})$$

10. Berdasarkan sifat det(AB) = det(A) det(B) akan didapatkan

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det\left(A\right)}.$$

$x + y = 84$

$2x + 4y = 220$

Masih ingatkah Anda dengan penyelesaian sistem persamaan linear tersebut? Dengan metode substitusi, eliminasi, atau dengan menggambarkan grafiknya, maka akan diperoleh $x = 58$ dan $y = 26$.

Terdapat cara lain untuk menyelesaikan SPL selain dengan menggunakan metode substitusi, eliminasi, atau dengan menggambar grafik dari SPL. Cara itu disebut dengan metode matriks. Dalam menggunakan metode matriks Anda harus mengingat kembali penentuan invers suatu matriks yang sudah dipelajari pada subbab sebelumnya.

Sekarang kita ingin menyelesaikan sistem persamaan linear di atas dengan menggunakan metode matriks.

Coba perhatikan sistem persamaan linear tersebut. Apakah Anda bisa mengubah sistem persamaan tersebut ke dalam bentuk perkalian matriks? Untuk menguatkan jawaban Anda cobalah perhatikan contoh berikut ini.

Contoh 1.28

Sistem persamaan linear

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 2 \\ 5x + 6y = 9 \end{array}\right\}$$

Bentuk perkalian matriksnya adalah $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix}$

Ayo Mengamati

Minta siswa untuk mengamati Contoh 1.28, Contoh 1.29, dan Contoh 1.30 serta mengingat kembali konsep perkalian matriks untuk mendorong siswa memunculkan pertanyaan-pertanyaan sebagai titik awal menuju konsep. Setelah itu minta mereka untuk melengkapi tabel di bawahnya

Contoh 1.29

Sistem persamaan linear $\left.\begin{aligned} x+3y+z&=4 \\ 2x+2y+z&=-1 \\ 2x+3y+z&=3 \end{aligned}\right\}$

Bentuk perkalian matriksnya adalah $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

Contoh 1.30

Sistem persamaan linear $\left.\begin{aligned} x+y+z&=5 \\ x+y-4z&=10 \\ -4x+y+z&=0 \end{aligned}\right\}$

Bentuk perkalian matriksnya adalah $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$

Setelah memperhatikan contoh-contoh tersebut, isilah tabel berikut ini.

Sistem Persamaan Linear	Perkalian matriks
$3x+5y=5$ $x+2y=7$	$\begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix}$
$x+2y=7$ $x+3y=13$	$\begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix}$

Alternatif Penyelesaian Tabel Contoh 1.30

Sistem Persamaan Linier	Perkalian matriks
$3x+5y=5$ $x+2y=7$	$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$
$x+2y=7$ $x+3y=13$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 \\ 13 \end{bmatrix}$

Ayo Menanya

Pada aktivitas menanya, siswa diminta untuk membuat pertanyaan-pertanyaan yang memuat unsur kata "matriks koefisien variabel", "matriks variabel" , dan "matriks konstanta".

Guru bisa memilih beberapa pertanyaan yang dapat membantu siswa untuk lebih cepat memahami konsep.

Ayo Menggali Informasi

Ajak siswa untuk membuat sistem persamaan linier berdasarkan kreativitas mereka sendiri. Bimbing siswa untuk mengubah sistem persamaan linier yang telah mereka buat ke bentuk perkalian matriks.

Sistem Persamaan Linear	Perkalian matriks
$x - 2y + z = 6$ $2x - 5y + z = 1$ $3x - 7y + 2z = -1$	$\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix}$
$x + y + 2z = 8$ $-x - 2y + 3z = 1$ $3x - 7y + 4z = 10$	$\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix}$

Ayo Menanya

Setelah Anda mengisi tabel di atas, coba buatlah pertanyaan tentang pengubahan sistem persamaan linear ke bentuk perkalian matriks yang memuat kata-kata "matriks koefisien variabel", "matriks variabel" dan "matriks konstanta".

Ayo Menggali Informasi

Dari sekian banyak pertanyaan yang Anda buat, mungkin ada diantaranya pertanyaan-pertanyaan berikut:

1. Apakah matriks konstanta dalam sistem persamaan tersebut merupakan hasil kali antara matriks koefisien variabel dengan matriks variabelnya?
2. Apakah semua sistem persamaan linear dapat diubah ke bentuk perkalian matriks koefisien dengan matriks variabelnya ?

Coba cek soal-soal pada tabel di atas. Kemudian buatlah beberapa (minimal 5) sistem persamaan linear dan buatlah persamaan matriksnya pada tempat berikut ini.

Alternatif Penyelesaian Tabel Contoh 1.30

Sistem Persamaan Linier	Perkalian matriks
$x - 2y + z = 6$ $2x - 5y + z = 1$ $3x - 7y + 2z = -1$	$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 3 & -7 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
$x + y + 2z = 8$ $-x - 2y + 3z = 1$ $3x - 7y + 4z = 10$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & -7 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}$

Dari Contoh 1.27 dan hasil pengisian tabel di atas, bisakah Anda menjelaskan bagaimana cara mengubah sistem persamaan linear menjadi bentuk perkalian matriks? Misalkan matriks koefisien = A, matriks variabel = X dan matriks konstanta = B, maka sistem persamaan linear dapat diubah menjadi bentuk perkalian matriks seperti apa?

Tulislah kesimpulan Anda tentang cara mengubah sistem persamaan linear menjadi bentuk perkalian matriks, kemudian tukarkan kesimpulan tersebut dengan teman sebangku.

Tulislah sistem persamaan linear berikut dalam bentuk persamaan matriks.

1. $\left.\begin{aligned} 2x + y &= 4 \\ 3x + 4y &= 14 \end{aligned}\right\}$
2. $\left.\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ 3x - 2y &= 1 \end{aligned}\right\}$
3. $\left.\begin{aligned} 3x + y &= 3 \\ 2x - 2y &= 2 \end{aligned}\right\}$
4. $x + 2y + 3z = 5$
   $2x + 5y + 3z = 3$
   $x + 8z = 17$
5. $x + y + 2z = a$
   $x + z = b$
   $2x + y + 3z = c$

Bimbing siswa untuk dapat menuliskan bentuk umum perkalian matriks pada SPL yaitu $AX = B$

Ayo Mengomunikasikan

Pada sesi ini, guru bisa meminta siswa untuk menuliskan kesimpulan yang didapat pada kertas. Selanjutnya bisa menerapkan Kunjung Karya, Karya Kunjung, selanjutnya siswa lain menuliskan komentar di kertas dan ditempel pada Karya siswa/kelompok yang lain dan dilanjutkan diskusi kelas.

Sebelumnya telah disimpulkan cara untuk mengubah sistem persamaan linear ke dalam bentuk perkalian matriks. Sistem persamaan linear pada Contoh 1.27 dapat dibentuk menjadi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 84 \\ 220 \end{bmatrix}$$

Kita misalkan $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, dan $B = \begin{bmatrix} 84 \\ 220 \end{bmatrix}$. Sehingga perkalian matriks di atas dapat kita tulis menjadi $AX = B$ .... (1)

Anda tentu tahu bahwa invers dari matriks A adalah $\begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ atau bisa dituliskan sebagai $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Sekarang kita akan mempelajari bagaimana menyelesaikan sistem persamaan linear di atas dengan menggunakan metode matriks.

Sebelum Anda mempelajari metode tersebut, masih ingatkah Anda cara menyelesaikan persamaan linear $2x = 6$? Jika Anda mengalikan kedua ruas persamaan tersebut dengan invers perkalian 2 yaitu $\frac{1}{2}$, maka diperoleh

$$\frac{1}{2}(2x) = \frac{1}{2}(6)$$

Jadi $x = 3$.

Ayo Mengamati

Minta siswa untuk mencermati kembali Contoh 1.27, dan penulisannya dalam bentuk perkalian matriks. Ingatkan siswa tentang materi invers matriks.

Minta siswa mengamati cara menyelesaikan persamaan linear sederhana $2x = 6$.

Lakukan hal yang sama untuk persamaan (1). Kalikan kedua ruas dengan invers matriks A yaitu A^{-1}. Apa yang anda peroleh? Tuliskan pada tempat berikut ini.

Ayo Menanya

Berdasarkan pengamatan yang Anda lakukan, coba buatlah pertanyaan yang memuat kata-kata "matriks variabel", "matriks invers koefisien variabel" dan "matriks konstanta".Tuliskan pertanyaan Anda pada tempat berikut ini.

Ayo Menggali Informasi

Agar Anda lebih yakin, coba lengkapi tabel berikut ini.

Bimbing siswa untuk menggunakan cara yang sama dalam menyelesaikan SPL dengan menggunakan matriks sehingga diperoleh metode penyelesaian yaitu:

$X = A^{-1} B$

Minta siswa untuk membuat pertanyaan dari hasil mengamati.

Contoh:

Apakah matriks variabel pada SPL sama dengan matriks invers koefisien variabel dikalikan dengan matriks konstanta?

Untuk lebih meyakinkan jawaban siswa pada kegiatan Ayo, Menanya minta siswa untuk mengisi tabel pada kegiatan Ayo, Menggali Informasi. Kemudian bimbing siswa untuk dapat merumuskan kesimpulan yang menjawab pertanyaan- pertanyaan siswa.

Minta siswa untuk membandingkan hasil pengisian tabel nomor 1 dengan penyelesaian Contoh 1.27 yang terdapat di awal kegiatan 1.5. Bimbing siswa sehingga dapat merumuskan $X = A^{-1}B$. Selanjutnya bimbing siswa untuk dapat menyimpulkan bahwa penyelesaian SPL dengan matriks dapat dikerjakan dengan syarat $|A| \neq 0$.

No.	Matriks koefisien (A)	Matriks variabel (X)	Matriks konstanta (B)	Invers matriks koefisien (A^{-1})	$A^{-1}AX$	$A^{-1}B$
1.	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 84 \\ 220 \end{bmatrix}$			
2.	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix}$			
3.	$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$			
4	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & -3 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 11 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix}$			

Setelah mengalikan kedua ruas pada persamaan (1) dengan A^{-1} dan dari hasil pengisian tabel di atas apa yang dapat Anda simpulkan?Tuliskan kesimpulan Anda pada tempat berikut ini.

Perhatikan matriks No.1 pada tabel di atas, matriks tersebut merupakan matriks untuk Contoh 1.27. Setelah itu perhatikan isi kolom $A^{-1}B$ yang bersesuaian, kemudian bandingkan dengan penyelesaian Contoh 1.27 sebelumnya. Apa yang dapat anda simpulkan? Lakukan hal yang sama untuk matriks untuk nomor 2, 3, dan 4.

No.	Matriks koefisien (A)	Matriks variabel (X)	Matriks konstanta (B)	Invers matriks koefisien (A^{-1})	$A^{-1}AX$	$A^{-1}B$
1.	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 84 \\ 220 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 58 \\ 26 \end{bmatrix}$
2.	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$
3.	$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & -3 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 11 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & -11 & 7 \\ 1 & -8 & 5 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

Berdasarkan informasi yang Anda dapatkan, coba jelaskan bagaimana cara menyelesaikan sistem persamaan linear dengan menggunakan matriks. Untuk sistem persamaan (1), anda bisa menuliskan penyelesaiannya sebagai hasil perkalian antara matriks apa?

Sekarang, coba Anda cari penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut.

$2x + 3y = 7$

$4x + 6y = 13$

Berapa determinan dari matriks A (matriks koefisien) dari SPL di atas? Bisakah Anda menentukan invers matriks A? Bisakah Anda menentukan penyelesaian dari soal tersebut? Dari beberapa pertanyaan tersebut, buatlah kesimpulan mengenai penentuan penyelesaian sistem persamaan linear dengan menggunakan matriks. Jelaskan mengenai pengaruh nilai determinan matriks koefisien terhadap penyelesaian SPL tersebut. Tuliskan jawaban Anda pada tempat berikut ini.

Presentasikan kesimpulan Anda tentang cara menyelesaikan SPL dengan matriks serta pengaruh determinan matriks terhadap penyelesaian SPL tersebut di depan kelas. Perhatikan kesimpulan yang dipresentasikan oleh teman Anda.

Pada sesi ini, guru bisa meminta siswa untuk mempresentasikan kesimpulan yang diperoleh pada kegiatan sebelumnya. Bimbing siswa untuk melakukan tanya jawab selama proses presentasi berlangsung.

Kegiatan 1.5.2 Memodelkan dan Menyelesaikan Masalah Sehari-hari yang Berkaitan dengan SPL Tiga Variabel Menggunakan Matriks

Perhatikan contoh permasalahan sehari-hari berikut ini.

Contoh 1.31

Suatu perusahaan taksi memiliki 3 jenis mobil taksi yaitu Jenis X, Jenis Y, dan jenis Z. Jumlah keseluruhah mobil taksi yang dimiliki adalah 100 mobil. Mobil-mobil tersebut ditempatkan di 2 pangkalan taksi yaitu pangkalan taksi A dan pangkalan taksi B. Di pangkalan taksi A ditempatkan $\frac{1}{2}$ dari mobil Jenis X, $\frac{1}{4}$ dari mobil Jenis Y, dan $\frac{1}{5}$ dari mobil jenis Z. Jumlah keseluruhan mobil taksi di pangkalan A adalah 30. Di pangkalan taksi B ditempatkan $\frac{1}{2}$ dari mobil Jenis X, $\frac{1}{2}$ dari mobil Jenis Y, dan $\frac{1}{5}$ dari mobil jenis Z. Jumlah keseluruhan mobil taksi di pangkalan B adalah 35. Sedangkan mobil taksi lainnya melayani penumpang. Tentukan banyaknya masing-masing jenis mobil taksi yang dimiliki.

Contoh 1.31 di atas merupakan contoh sistem persamaan linear tiga variabel. Sekarang kita ingin menyelesaikan sistem persamaan linear di atas dengan menggunakan metode matriks.

Misal x adalah banyaknya mobil jenis X, y adalah banyaknya mobil jenis Y, dan z adalah banyaknya mobil jenis Z. Jumlah keseluruhan mobil taksi yang dimiliki adalah 100 sehingga dapat dinyatakan sebagai berikut

$$x + y + z = 100$$

Ayo Mengamati

Ajak siswa untuk menjawab pertanyaan yang disajikan dalam Contoh 1.31 pada kegiatan "Ayo, Mengamati". Tujuannya agar siswa mampu memodelkan dan menyelesaikan masalah sehari-hari dengan menggunakan matriks.

Banyaknya taksi di pangkalan A adalah 30 dan di pangkalan B adalah 35 sehingga banyaknya taksi yang melayani penumpang adalah 100 – 65 = 35.

Sistem persamaan linear yang dapat dibentuk dari Contoh 1.31 adalah sebagai berikut

$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{5}z=30$$

$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{5}z=35$$

$$\frac{1}{4}y+\frac{6}{10}z=35$$

Masih ingatkah Anda dengan penyelesaian sistem persamaan linear tersebut?

Ayo Menanya

Berdasarkan pengamatan yang Anda lakukan, diharapkan muncul pertanyaan berdasar Contoh 1.31. Tuliskan pertanyaan Anda pada tempat berikut ini.

Dalam menyelesaikan sistem persamaan linear, akan muncul pertanyaan-pertanyaan sebagai berikut:

1. Apakah matriks yang dihasilkan dari sistem persamaan linear dengan tiga variabel tersebut memiliki determinan yang tidak nol?
2. Apakah matriks yang dihasilkan dari sistem persamaan linear dengan tiga variabel tersebut memiliki matriks invers?
3. Apakah SPL dengan tiga variabel tersebut dapat diselesaikan?

Minta siswa untuk membuat pertanyaan dari hasil mengamati.

Ajak siswa untuk menggali informasi yang disajikan pada kegiatan "Ayo, Menggali Informasi". Informasi yang ingin digali adalah siswa mengetahui pengaruh apabila matriks yang dihasilkan dalam sistem persamaan linear memiliki determinan nol dan memiliki matriks invers.

Alternatif Jawaban

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{6}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 35 \\ 35 \end{bmatrix}$$

Langkah selanjutnya cari determinan dari matriks konstanta dan inversnya

Berdasarkan informasi yang Anda dapatkan, coba jelaskan bagaimana cara menyelesaikan sistem persamaan linear tiga variabel dengan menggunakan matriks. Sekarang, coba Anda cari penyelesaian dari sistem persamaan linear dengan tiga variabel dari Contoh 1.31. Tuliskan penyelesaian SPL dari Contoh 1.31 (beserta caranya) pada tempat yang telah disediakan berikut ini.

Berdasarkan hasil mengamati dan menyelesaikan Contoh 1.31, tuliskan kesimpulan Anda tentang cara memodelkan dan menyelesaikan masalah sehari-hari yang berkaitan dengan SPL tiga variabel. Diskusikan hasil yang Anda temukan dengan teman sekelompok, kemudian tukarkan hasil diskusi tersebut dengan kelompok lain dan beri komentar terhadap hasil kelompok lain.

Setelah Anda dapat menyelesaikan sistem persamaan linear pada Kegiatan 1.5.1 dan Kegiatan 1.5.2, Anda telah dapat menentukan bilamana suatu masalah dalam bentuk sistem persamaan linear dapat dicari selesaiannya atau tidak.

Ajak siswa untuk menjawab pertanyaan yang disajikan dalam kegiatan “Ayo, Menalar”.

Minta siswa untuk menyajikan jawaban menalarnya di depan kelas. Beri kesempatan kepada penyaji untuk untuk menanggapi pertanyaan temannya. Guru memberi masukan apabila diperlukan.

Latihan 1.5

1. Lusi mempunyai uang Rp150.000,00 lebihnya dari uang Sinta. Jika tiga kali uang Lusi ditambah dua kali uangnya Sinta jumlahnya adalah Rp950.000,00. Tentukan besar masing-masing uang Lusi dan Sinta!
2. Irfan dan Roni bekerja di pabrik kaos bagian menyablon logo. Irfan dapat menyablon 300 kaos setiap jam, sedangkan Roni dapat menyablon 200 kaos setiap jam. Lama waktu mengerjakan Irfan dan Roni tidak sama. Jumlah jam kerja Irfan dan Roni adalah 50 jam dengan banyak kaos yang telah disablon sebanyak 12.400 kaos. Berapa lama kerja Irfan dan Roni?
3. Ingat kembali bahwa persamaan $ax + by = c$ dengan a, b, dan c adalah konstanta menyatakan persamaan garis lurus. Carilah penyelesaian sistem persamaan linear berikut.

   $$2x - 3y = 6$$

   $$x + 2y = 3$$

   Kemudian gambarlah garis lurus dari masing-masing persamaan linear pada satu diagram. Apakah yang dapat disimpulkan tentang koordinat titik potong kedua garis dengan penyelesaian sistem persamaan linear di atas?
4. Diketahui sistem persamaan linear

   $$2x - 3y = 6$$
   $$2x - 3y = 9$$

   a) Carilah penyelesaian sistem persamaan linear dengan menggunakan metode matriks.

Alternatif Penyelesaian Latihan 1.5

1. Uang Lusi = Rp250.000 Uang Sinta = Rp100.000
2. Lama kerja Irfan = 24 jam
   Lama kerja Roni = 26 jam
3. $x = 3$ dan $y = 0$, sehingga himpunan penyelesaiannya adalah $\{3, 0\}$ yang merupakan titik potong dari kedua grafik persamaan linear tersebut.
4. a. Kita tidak dapat menyelesaikan sistem persamaan linear dengan menggunakan matriks karena determinan matriks koefisien = 0.
   b. Dengan menggunakan eliminasi, kita dapat menunjukkan bahwa sistem persamaan linear tidak mempunyai penyelesaian.
   c. Metode yang lebih cocok adalah metode eliminasi.
   d. Jika sistem persamaan linear 2 variabel tidak mempunyai penyelesaian, maka kedudukan kedua garis adalah sejajar.

b) Carilah penyelesaian sistem persamaan linear dengan menggunakan metode eliminasi.
c) Metode manakah yang lebih cocok untuk menyelesaikan sistem persamaan linear di atas.
d) Gambarlah garis lurus untuk tiap-tiap persamaan linear pada satu diagram.
e) Apakah yang dapat disimpulkan tentang penyelesaian sistem persamaan linear dengan kedudukan kedua garis untuk setiap sistem persamaan.

5. Diketahui sistem persamaan linear

$$2x - 3y = 6$$

$$4x - 6y = 12$$

a) Carilah penyelesaian sistem persamaan linear dengan menggunakan metode matriks.
b) Carilah penyelesaian sistem persamaan linear dengan menggunakan metode eliminasi.
c) Metode manakah yang lebih cocok untuk menyelesaikan sistem persamaan linear di atas.
d) Gambarlah garis lurus dari tiap-tiap persamaan linear pada satu diagram.
e) Apakah yang dapat disimpulkan tentang penyelesaian sistem persamaan linear dengan kedudukan kedua garis untuk tiap-tiap sistem persamaan.
f) Berdasarkan soal no 4 – 5 (e) buatlah kesimpulan tentang banyaknya penyelesaian sistem persamaan linear.
g) Berdasarkan soal no 4 dan 5, buatlah kesimpulan bilamana metode matriks tidak dapat digunakan.

Alternatif Penyelesaian Latihan 1.5

5. a. Kita tidak dapat menyelesaikan sistem persamaan linear dengan menggunakan matriks karena determinan matriks koefisien = 0.

   b Dengan menggunakan eliminasi, kita dapat menunjukkan bahwa sistem persamaan linear mempunyai tak terhingga penyelesaian yaitu $x = 3 + \frac{3}{2}t$, $y = t$, dengan t adalah bilangan real.

   c. Metode yang lebih cocok adalah metode eliminasi.

   e. Jika sistem persamaan linear 2 variabel mempunyai tak hingga penyelesaian, maka kedudukan kedua garis adalah berimpit.

   f. Sistem persamaan linear dapat mempunyai satu penyelesaian, tak terhingga penyelesaian, atau tidak mempunyai penyelesaian.

   g. Metode matriks tidak dapat digunakan jika determinan matriks koefisien = 0.

6. Pada saat ingin menonton film ke bioskop, Ida, Ahmad, dan Putra masing-masing membeli snack. Ida membeli dua cokelat, satu minuman dan dua bungkus popcorn dengan membayar Rp29.000,00. Ahmad menghabiskan Rp19.000,00 karena membeli satu cokelat, dua minuman dan satu bungkus pop corn. Sedangkan Putra membeli dua minuman dan tiga bungkus pop corn dengan menghabiskan Rp33.000,00. Berapa harga dari tiap-tiap snack?

7. Sudut suatu segitiga yang berukuran sedang adalah 30^0 lebih besar daripada sudut yang terkecil. Sudut yang terbesar 10^0 lebih besar daripada sudut sedang. Berapakah besar tiap-tiap sudut?

8. Diberikan penyelesaian sistem persamaan linear adalah $x = \frac{1}{2}$ dan $y = -\frac{2}{3}$. Susunlah 3 sistem persamaan linear yang masing-masing terdiri atas 2 persamaan linear dengan dua variabel dan penyelesaiannya adalah nilai x dan y di atas!

Untuk soal no. 9 – 10, carilah solusi persamaan linear dengan menggunakan matriks.

9. $2x - 3y + z = -9$
   $2x + y - z = 9$
   $x + y + z = 5$

10. $x + y - z = -4$.
    $2x + 4y + 2z = 10$.
    $x + 3y + z = 4$

11. Diketahui sistem persamaan linear
    $2x + 3y + z = 0$
    $x + 2y + 3z = 0$
    $3x + 2y + z = 0$
    a) Carilah penyelesaian sistem persamaan linear dengan menggunakan matriks!
    b) Apakah perbedaan sistem persamaan linear di atas dengan sistem persamaan linear pada no 9 – 10?

Alternatif Penyelesaian Latihan 1.5

6. Harga satu cokelat = Rp4.000,00
   Harga satu minuman = Rp3.000,00
   Harga satu popcorn = Rp9.000,00

7. Sudut terbesar = $\frac{230°}{3}$,

   sudut tengah = $\frac{200°}{3}$,

   sudut terkecil = $\frac{110°}{3}$

8. contoh:
   $6x + 3y = 1$
   $4x + 3y = 0$

9. $x = 2, y = 4, z = -1$

10. $x = 2, y = -1, z = 5$

11. a. $x = 0, y = 0, z = 0$.
    b. Perbedaan sistem persamaan linier no 11.a dengan sistem persamaan linear no 9 – 10 adalah bilangan-bilangan pada ruas kanan. Semua bilangan pada ruas kanan sistem persamaan linear no 11.a ádalah 0. Sedangkan bilangan pada ruas kanan sistem persamaan linear no 9 – 10 tidak ada yang 0.

Alternatif Penyelesaian

Latihan 1.5

12. Diketahui sistem persamaan linear

$$x + 2y + 2z = -3$$
$$2x - y + 2z = 9$$
$$3x + y + 4z = 8$$

a. Carilah penyelesaian sistem persamaan linear dengan menggunakan matriks.
b. Carilah penyelesaian sistem persamaan linear dengan menggunakan eliminasi.
c. Metode manakah yang lebih cocok untuk menyelesaikan sistem persamaan linear di atas.
d. Apakah yang dapat disimpulkan tentang penyelesaian sistem persamaan linear di atas.
e. Bagaimana penyelesaian sistem persamaan linear di atas jika semua bilangan di ruas kanan diganti dengan 0.

13. Diketahui sistem persamaan linear

$$-2x - z = -3$$
$$-x + y + z = -1$$
$$-6x + 2y = -8$$

a) Carilah penyelesaian sistem persamaan linear dengan menggunakan matriks.
b) Carilah penyelesaian sistem persamaan linear dengan menggunakan eliminasi.
c) Metode manakah yang lebih cocok untuk menyelesaikan sistem persamaan linear di atas.
d) Apakah yang dapat disimpulkan tentang penyelesaian sistem persamaan linear.
e) Bagaimana penyelesaian sistem persamaan linear di atas jika semua ruas kanan diganti dengan 0.
f) Berdasarkan hasil yang diperoleh dari soal 9 – 13(e), apakah yang dapat disimpulkan tentang banyaknya penyelesaian sistem persamaan linear.

12 a. Kita tidak dapat menyelesaikan sistem persamaan linear dengan menggunakan matriks karena determinan matriks koefisien = 0.

b. Dengan menggunakan eliminasi, kita dapat menunjukkan bahwa sistem persamaan linear tidak mempunyai penyelesaian.

c. Metode yang lebih cocok adalah metode eliminasi.

d. Sistem persamaan linier tidak mempunyai penyelesaian. Jika semua bilangan di ruas kanan diganti 0, maka sistem persamaan linearnya akan mempunyai tak terhingga

e. penyelesaian yaitu $x = -\frac{6}{5}t$, $y = -\frac{2}{5}t$, $z = t$, dengan t adalah bilangan riil.

13. a. Kita tidak dapat menyelesaikan sistem persamaan linear dengan menggunakan matriks karena determinan matriks koefisien = 0.

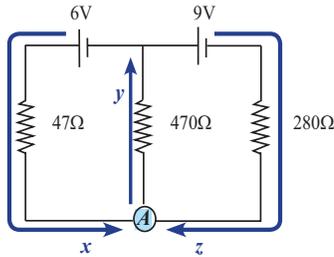
b. Dengan menggunakan eliminasi, kita dapat menunjukkan bahwa sistem persamaan linear mempunyai tak terhingga penyelesaian yaitu $x = t$, $y = 3t - 4$, $z = -2t + 3$, dengan t adalah bilangan real.

c. Metode yang lebih cocok adalah metode eliminasi.

d. Sistem persamaan linear mempunyai tak terhingga penyelesaian.

e. Jika semua bilangan di ruas kanan diganti 0, maka sistem persamaan linearnya akan mempunyai tak terhingga penyelesaian yaitu $x = -t$, $y = 3t$, $z = -2t$, dengan t adalah bilangan real.

f. Sistem persamaan linear dapat mempunyai satu penyelesaian, tak terhingga penyelesaian, atau tidak mempunyai penyelesaian.

14. Suatu rangkaian listrik terdiri dari dua baterai (6 V dan 9 V) dan tiga resistor (47 ohm, 470 ohm, dan 280 ohm). Baterai-baterai tersebut menghasilkan aliran arus listrik pada rangkaian. Misal x, y dan z merepresentasikan arus dalam ampere yang mengalir melewati masing-masing resistor. Voltasi yang melewati masing-masing resistor adalah arus listrik dikalikan dengan resistansinya (V= IR). Hal tersebut menghasilkan dua persamaan loop pada rangkaian sebagai berikut:
    $47x + 470y = 6$
    $280z + 470y = 9$
    Arus listrik yang mengalir ke masing-masing titik pada rangkaian harus mengalir keluar. Jadi, di persimpangan A, $x + z - y = 0$. Tentukan arus yang mengalir melalui masing-masing resistor!

Sumber: Discovering Algebra, an Investigative Approach

15. Carilah penyelesaian sistem persamaan berikut

$$\frac{2}{x} + \frac{2}{z} = 1$$

$$\frac{3}{x} - \frac{1}{y} + \frac{4}{z} = 7$$

$$\frac{6}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 2$$

Alternatif Penyelesaian Latihan 1.5

14. $x = 0{,}00162\ A$, $y = 0{,}0126\ A$, dan $z = 0{,}012\ A$

15.

$$x = \frac{4}{5},\ y = -\frac{4}{25},\ \text{dan } z = -\frac{4}{3}$$

16. Pada suatu taman ria ada 3 jenis wahana bermain: Jolly, Adventure dan Thrill. Karcis masuk gratis jika membeli satu paket tiket, termasuk 10 tiket untuk tiap-tiap wahana. Atau Anda dapat membayar Rp50.000,00 untuk karcis masuk dan kemudian membeli tiket untuk masing-masing wahana secara tersendiri. Noah, Rita, dan Carey memutuskan untuk membayar karcis masuk dan membeli tiket secara individu. Noah membayar Rp195.500,00 untuk 7 wahana Jolly, 3 wahana Adventure dan 9 wahana Thrill. Rita membayar Rp130.000,00 untuk 9 wahana Jolly, 10 wahana Adventure. Carey membayar Rp249.500,00 untuk 8 wahana Jolly, 7 wahana Adventure dan 10 wahana Thrill. (harga tersebut belum termasuk tiket masuk)
    a. Berapa harga tiap-tiap wahana?
    b. Berapa yang harus dibayar untuk satu paket tiket lengkap?
    c. Apakah Noah, Rita dan Carey sebaiknya membeli satu paket tiket lengkap?

Sumber: Discovering Algebra, an Investigative Approach

17. Tomi dan Budi secara bersamaan membutuhkan waktu 12 menit untuk mencuci sepeda motor. Budi dan Benny secara bersamaan membutuhkan waktu 15 menit untuk menyelesaikan pekerjaan yang sama. Sedangkan Tomi dan Benny secara bersamaan membutuhkan waktu 20 menit untuk mencuci sepeda motor yang sama. Tentukan berapa menit yang diperlukan oleh Tomi, Budi, dan Benny untuk mencuci sepeda motor yang sama secara bersama-sama.

Alternatif Penyelesaian Latihan 1.5

16. a. Harga 1 tiket wahana Jolly = Rp5.000,00

    Harga 1 tiket wahana Adventure = Rp8.500,00

    Harga 1 tiket wahana Thrill = Rp15.000,00

    b. Harga satu paket tiket lengkap = Rp285.000,00

    c. Ya

17. Misalkan waktu yang diperlukan oleh Tomi, Budi, dan Benny secara berturut-turut untuk mencuci sepeda motor sendirian ádalah x menit, y menit, dan z menit. Hal ini berarti dalam waktu 1 menit, Tomi, Budi, dan Benny secara berturut-turut menyelesaikan pekerjaan sebesar $\frac{1}{x}$ bagian, $\frac{1}{y}$ bagian, dan $\frac{1}{z}$

    bagian. Karena Tomi dan Budi secara bersamaan memerlukan waktu 12 menit untuk mencuci sepeda motor, diperoleh persamaan $\frac{12}{x}+\frac{12}{y}=1$. Dengan cara

    yang sama untuk Budi dan Benny, diperoleh persamaan $\frac{15}{y}+\frac{15}{z}=1$.

    Untuk Tomi dan Benny diperoleh persamaan $\frac{20}{x}+\frac{20}{z}=1$.

    Dengan menyelesaikan sistem persamaan di atas, diperoleh $x = 30$, $y = 20$, dan $z = 60$.
    Sekarang misalkan waktu yang diperlukan oleh Tomi, Budi, dan Benny untuk mencuci sepeda motor yang sama secara bersama-sama adalah t menit. Diperoleh persamaan :

    $$\frac{t}{x} + \frac{t}{y} + \frac{t}{z} = 1, \text{ atau } \frac{t}{30} + \frac{t}{20} + \frac{t}{60} = 1, \text{ atau } t = 10.$$

    Jadi, waktu yang diperlukan oleh Tomi, Budi, dan Benny untuk mencuci sepeda motor yang sama secara bersama-sama adalah 10 menit.

18. $x=\frac{1}{3}, y=1, z=\frac{1}{5}$.

18. Carilah himpunan solusi sistem persamaan berikut

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} = \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{yz}{y+z} = \dfrac{1}{6} \\ \dfrac{xz}{x+z} = \dfrac{1}{8} \end{cases}$$

Petunjuk : Tulis $\frac{xy}{x+y} = \frac{1}{4}$ sebagai $\frac{x+y}{xy} = 4$. Demikian juga dengan kedua persamaan lainnya.

19. Diberikan penyelesaian sistem persamaan linear adalah $x = 2$, $y = -3$, dan $z = -2$.
Susunlah 3 sistem persamaan linear dengan setiap sistem terdiri atas 3 persamaan linear dengan 3 variabel dan penyelesaiannya adalah nilai x, y dan z di atas.

20. Susunlah suatu sistem persamaan linear dengan 3 persamaan linear dan 3 variabel yang memiliki tak hingga banyaknya penyelesaian.

21. Carilah penyelesaian sistem persamaan berikut

$$\begin{aligned} \sin\alpha + \cos\beta + 2\tan\gamma &= 2 \\ \sin\alpha - 2\cos\beta + \tan\gamma &= 3 \\ 2\sin\alpha - \cos\beta - 2\tan\gamma &= 3 \end{aligned}$$

dengan $0 \le \alpha \le 2\pi$, $0 \le \beta \le 2\pi$, $0 \le \gamma \le 2\pi$.

Alternatif Penyelesaian Latihan 1.5

19 dan 20 merupakan soal terbuka sehingga setiap siswa dapat memberikan jawabannya masing-masing.

21. Menggunakan metode matriks diperoleh penyelesaian

$$a = \frac{\pi}{2}, \beta = -\pi, \gamma = 0$$

$$a = \frac{\pi}{2}, \beta = -\pi, \gamma = \pi$$

$$a = \frac{\pi}{2}, \beta = -\pi, \gamma = 2\pi$$

Bunga, Pertumbuhan, dan Peluruhan

Kompetensi Dasar Dan Pengalaman Belajar

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
1.1 Menghayati dan mengamalkan ajaran agama yang dianutnya. 2.1 Menghayati perilaku disiplin, sikap kerjasama, sikap kritis dan cermat dalam bekerja menyelesaikan masalah kontekstual.3.2 Mendeskripsikan konsep barisan dan deret pada konteks dunia nyata, seperti bunga, pertumbuhan, dan peluruhan. 4.2 Mengidentifikasi, menyajikan model matematika dan menyelesaikan masalah keseharian yang berkaitan dengan barisan dan deret aritmetika, geometri dan yang lainnya.	Melalui pembelajaran pertumbuhan dan peluruhan, siswa memperoleh pengalaman belajar: 1. Mengamati dan mendeskripsikan karakteristik masalah pertumbuhan dan peluruhan. 2. Mengamati dan menerapkan konsep barisan dan deret geometri untuk menyelesaikan masalah pertumbuhan dan peluruhan.

Biografi Leonard Euler

Sumber: wikipedia.org

Leonhard Euler (1707 – 1783) merupakan tokoh dominan dari matematika abad kedelapanbelas dan pengarang matematika yang paling subur sepanjang masa. Lahir dekat Besel, Swiss, ia belajar kepada orang bangsanya Johann Bernoulli dan telah menerbitkan makalah-makalah pada usia 18 tahun. Ia menjabat di Universitas Besel, St. Petersburg Academy of Sciences. Pada waktu ia meninggal, disebutkan bahwa semua matematikawan Eropa adalah mahasiswanya.

Minat Euler terentang di semua matematika dan fisika. Ia memperkenalkan e sebagai bilangan dasar untuk logaritma asli, memperlihatkan bahwa e dan e^2 adalah tak rasional, dan menemukan hubungan luar biasa $e^{i\pi} = -1$. Kebutaan selama 17 tahun terakhir dari hidupnya tidak menghambat karyanya. Sebagian disebabkan oleh daya ingatnya yang ajaib. Ia mengetahui dalam hati rumus-rumus trigonometri dan analisis. Dikatakan bahwa ia telah mengerjakan suatu perhitungan sampai 50 posisi desimal di dalam kepalanya. Selain itu, Euler adalah seorang pecinta keluarga, yang seringkali menghabiskan waktu sore harinya bersama 13 putra-putrinya dengan membangun permainan-permainan ilmiah.

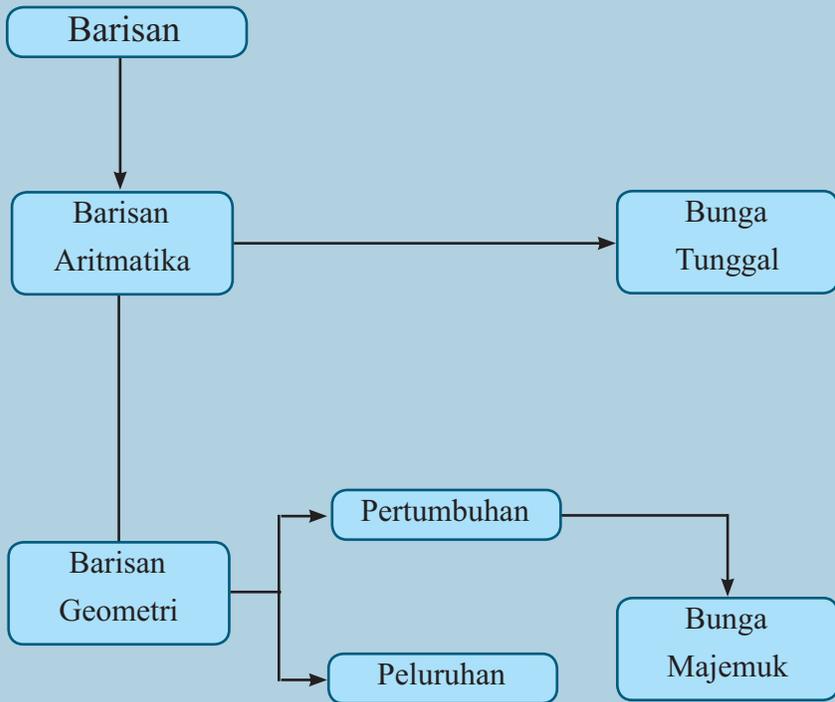
Sumber : wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler

Verberg, D., E. J. Purcell, and S. E. Steven. 2007. Calculus 8th. NJ: Pearson Education

Hikmah yang mungkin bisa kita petik adalah:

Keterbatasan fisik tidak menghambat seseorang untuk menghasilkan karya yang fantastis.

Peta Konsep

Barisan
Barisan Aritmatika
Bunga Tunggal
Barisan Geometri
Pertumbuhan
Peluruhan
Bunga Majemuk

Subbab 2.1 Bunga Tunggal Dan Bunga Majemuk

Kegiatan 2.1.1 Mengenal Bunga Tunggal dan Bunga Majemuk

 Cerita 1

Pak Rian berencana menginvestasikan uangnya sebesar Rp50.000.000,00 di bank dengan keinginan mendapatkan keuntungan yang besar. Dia memasuki bank lokal *A* di daerahnya dan bertemu dengan pegawai di sana. Bank tersebut menawarkan program investasi dengan bunga tunggal 10% tiap tahunnya selama 5 tahun. Pak Rian akan menerima bunga setiap tahunnya sejumlah Rp5.000.000,00. Sebelum memutuskan berinvestasi, Pak Rian pergi ke bank lokal *B* yang yang tidak jauh dari bank sebelumnya. Bank *B* menawarkan program investasi dengan modal sama selama 5 tahun tetapi dengan bunga majemuk 9% tiap tahunnya. Pak Rian membuat perhitungan sendiri yang dapat dilihat di tabel investasi Bank *A* dan Bank *B* di bawah ini:

Program Investasi Bank *A* dan Bank *B*

Tahun	Bunga Bank A	Saldo A	Bunga Bank B	Saldo B
0	0	Rp50.000.000,00	0	Rp50.000.000,00
1	Rp5.000.000,00	Rp55.000.000,00	Rp4.500.000,00	Rp54.500.000,00
2	Rp5.000.000,00	Rp60.000.000,00	Rp4.905.000,00	Rp59.405.000,00
3	Rp5.000.000,00	Rp65.000.000,00	Rp5.346.450,00	Rp64.751.450,00
4	Rp5.000.000,00	Rp70.000.000,00	Rp5.827.630,50	Rp70.579.080,50
5	Rp5.000.000,00	Rp75.000.000,00	Rp6.352.117,245	Rp76.931.197,745
Saldo Akhir		Rp75.000.000,00		Rp76.931.197,745

Walaupun suku bunga yang ditawarkan Bank *B* lebih kecil dari Bank *A*, tetapi program investasi dengan bunga majemuk di Bank *B* lebih menguntungkan daripada bunga tunggal di Bank *A*. Dengan perhitungan yang cermat, Pak Rian memutuskan untuk menginvestasikan uangnya pada Bank *B*.

Kegiatan Sebelum Pembelajaran

1. Minta siswa untuk mengingat kembali tetang barisan dan deret aritmetika dan geometri.
2. Ajak siswa untuk mengamati cerita 1 dan cerita 2 mengenai bunga tunggal dan majemuk sekaligus tabel yang sudah disajikan. Ajak siswa untuk mendiskusikan sejenak apa hubungan antara konsep barisan dan deret aritmetika dan geometri dengan data pada tabel (tidak harus terselesaikan). Jawaban dari diskusi ini dapat ditemukan di akhir pembelajaran.

Cerita 2

Andi adalah seorang mahasiswa Teknik Sipil sebuah universitas ternama di Malang. Dia aktif di kegiatan mahasiswa termasuk klub fotografi. Andi menginginkan sebuah kamera bagus untuk kegiatannya di klub tersebut. Tetapi, harga kamera yang diinginkan sebesar Rp15.000.000,00. Dana yang cukup besar bagi seorang mahasiswa. Andi mendapatkan tawaran pinjaman dari BPR *A* dengan bunga tunggal 2% selama 2 tahun dan dari BPR *B* dengan bunga majemuk 2% selama 2 tahun.

Andi membuat perhitungan sendiri sebelum menentukan pilihan sebagai berikut:

Pinjaman BPR *A* dan BPR *B*

Tahun	Bunga *A*	Pinjaman *A*	Bunga *B*	Pinjaman *B*
0	0	Rp15.000.000,00	0	Rp15.000.000,00
1	Rp300.000,00	Rp15.300.000,00	Rp300.000,00	Rp15.300.000,00
2	Rp300.000,00	Rp15.600.000,00	Rp306.000,00	Rp15.606.000,00
Total Pinjaman		Rp15.600.000,00		Rp15.606.000,00

Terdapat selisih besar pengembalian dana di BPR *A* dan BPR *B*. Dengan perhitungan yang teliti, Andi memutuskan untuk meminjam dana di BPR *A*.

Perhatikan beberapa contoh permasalahan investasi dan pinjaman berikut ini:

1. Tomi meminjam uang di koperasi pegawai sebesar Rp100.000.000,00 untuk membeli mobil baru. Pinjaman yang diberikan selama 3 tahun dengan bunga 8%. Tomi harus membayar bunga sebesar Rp8.000.000,00 per tahun. Tomi membayar lunas pinjaman dan bunganya sebesar Rp124.000.000,00 di akhir masa pinjamannya.

Ajak siswa mengamati beberapa permasalahan simpanan dan pinjaman yang melibatkan bunga tunggal dan majemuk. Minta mereka juga mengamati pola penambahan bunga pada tiap permasalahan untuk mengenali ciri-ciri bunga tunggal dan majemuk.

2. Dani akan membeli sepeda motor seharga Rp20.000.000,00. Dia berencana akan meminjam uang ke suatu bank dengan bunga 8% selama 3 tahun. Dani diharuskan membayar bunga tiap tahunnya dengan besar yang berbeda. Pada tahun pertama, bunganya sebesar Rp1.600.000,00. Pada tahun kedua, bunga pinjamannya sebesar Rp1.728.000,00. Sedangkan bunga pada tahun ketiga adalah Rp1.866.240,00. Jadi, Dani harus membayar lunas pinjaman dan bunganya sebesar Rp25.194.240,00.

3. Pak Lukman dan istrinya akan menabungkan uangnya masing-masing sebesar Rp5.000.000,00 di tempat yang berbeda. Pak Lukman memilih menabungkan uangnya di bank "PRIMA" dengan bunga 6% sedangkan Bu Lukman menabungkan uangnya di bank "SENTOSA" dengan bunga yang sama. Selama 3 tahun mereka tidak pernah mengambil maupun menambah tabungannya. Ketika masing-masing mengambil uangnya di bank, Pak Lukman dan istrinya mendapat rincian sebagai berikut:

Rincian tabungan Pak Lukman dan Bu Lukman

Tahun	Bunga Bank "PRIMA"	Saldo Pak Lukman	Bunga Bank "SENTOSA"	Saldo Bu Lukman
0	0	Rp5.000.000,00	0	Rp5.000.000,00
1	Rp300.000,00	Rp5.300.000,00	Rp300.000,00	Rp5.300.000,00
2	Rp318.000,00	Rp5.618.000,00	Rp300.000,00	Rp5.600.000,00
3	Rp337.080,00	Rp5.955.080,00	Rp300.000,00	Rp5.900.000,00

Pak Lukman dan istrinya mendapatkan total dana yang berbeda satu sama lain meskipun suku bunga yang ditawarkan sama.

4. Pak Amir meminjam uang sebesar Rp1.000.000,00 di KUD "MAJU" untuk membeli pupuk. KUD memberikan pinjaman dengan bunga sebesar 5% tiap bulannya. Pak Amir mampu melunasi hutangnya selama 4 bulan setelah masa panen. Total pinjaman yang harus dilunasi sebesar Rp1.200.000,00 dengan bunga Rp50.000,00 tiap bulannya.

Dari beberapa permasalahan di atas, contoh 1, contoh 3 untuk Bu Lukman, dan contoh 4 adalah contoh bunga tunggal pada tabungan atau pinjaman. Sedangkan contoh 2 dan contoh 3 untuk Pak Lukman adalah contoh bunga majemuk pada tabungan atau pinjaman.

Dari pengamatan Anda terhadap permasalahan di atas, tulislah minimal 4 pertanyaan yang memuat kata-kata “barisan aritmetika”, “barisan geometri”, “bunga tunggal”, “bunga majemuk”, “pinjaman” dan “simpanan”.

Coba amati kembali permasalahan dan pertanyaan yang sudah Anda buat, mungkin pertanyaan-pertanyaan Anda ada di antara pertanyaan-pertanyaan berikut:

1. Konsep barisan apa yang digunakan dalam menghitung bunga tunggal?
2. Konsep barisan apa yang digunakan dalam menghitung bunga majemuk?
3. Bagaimana cara menghitung bunga tunggal pada simpanan atau pinjaman?
4. Bagaimana cara menghitung bunga majemuk pada simpanan atau pinjaman?

Untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan yang sudah Anda buat, ada baiknya Anda perhatikan bagaimana cara kerja prosentase, barisan, dan deret aritmetika, juga barisan dan deret geometri. Buatlah kesimpulan sementara dari hasil pengamatan Anda. Carilah informasi dari beberapa buku referensi, internet, atau sumber yang lain untuk menguatkan dugaan Anda.

Minta siswa untuk membuat beberapa pertanyaan mengenai informasi yang didapatkan dari hasil pengamatan tentang bunga tunggal dan majemuk.

Contoh pertanyaan:

Apa perbedaan bunga tunggal dan bunga majemuk?

1. Minta siswa mengamati kembali pertanyaan-pertanyaan yang sudah dibuat.
2. Minta beberapa siswa menuliskan pertanyaan mereka di papan tulis.
3. Minta siswa membuat dugaan jawaban dari pertanyaan-pertanyaan tersebut dengan menggunakan wawasan yang dikuasai dan beberapa sumber yang lainnya.

Carilah soal-soal mengenai bunga tunggal dan majemuk pada soal-soal UN, OSN, atau SBMPTN di tahun-tahun yang lalu. Dari contoh-contoh tersebut, dengan menggunakan kesimpulan sementara yang Anda buat, dapatkah Anda mengelompokkan mana yang merupakan masalah bunga tunggal dan mana yang merupakan masalah bunga majemuk?

Berikut ini diberikan beberapa permasalahan yang melibatkan bunga tungggal dan bunga majemuk.

Masalah mengenai bunga tunggal

1. Adi mendapatkan dana pinjaman dari yayasan pendidikan “Indonesia Pintar” untuk melanjutkan pendidikan ke jenjang yang lebih tinggi dengan pinjaman Rp20.000.000,00 dengan bunga tunggal 5% per tahun selama 4 tahun. Adi membayar lunas pinjamannya setelah 4 tahun sebesar Rp24.000.000,00 dengan rincian pinjaman sebagai berikut:

Tahun	Bunga	Pinjaman
0	0	Rp 20.000.000,00
1	Rp 1.000.000,00	Rp 21.000.000,00
2	Rp 1.000.000,00	Rp 22.000.000,00
3	Rp 1.000.000,00	Rp 23.000.000,00
4	Rp 1.000.000,00	Rp 24.000.000,00

2. Subhan akan mendirikan sebuah toko komputer di sebuah pusat perbelanjaan di Malang. Subhan membutuhkan dana sebesar Rp100.000.000,00 yang akan diperolehnya dari pinjaman bank. Jika dia meminjan dana tersebut dengan pelunasan dalam jangka waktu 5 tahun dengan bunga tunggal 8% per tahun, maka setiap tahunnya pinjamannya bertambah sebesar Rp8.000.000,00. Di akhir tahun kelima, Subhan membayar lunas pinjamannya sebesar Rp140.000.000,00.

- Ajak siswa menelaah beberapa contoh yang diberikan dan menyelesaikan permasalahan-permasalahn yang disediakan.
- Minta siswa membuat dugaan awal mengenai ciri-ciri bunga tunggal dan majemuk,serta hubungannya dengan deret geometri kemudian mempresntasikan di depan kelas.

3. Doni menabungkan uangnya di bank sebesar Rp10.000.000,00 di bank dengan bunga tunggal 6% per tahun. Setelah 5 bulan Doni mengambil semua uangnya untuk membayar biaya sekolahnya. Doni mendapatkan uang sebesar Rp10.250.000,00 dengan rincian sebagai berikut

Bulan	Bunga	Saldo
0	0	Rp10.000.000,00
1	Rp50.000,00	Rp10.050.000,00
2	Rp50.000,00	Rp10.100.000,00
3	Rp50.000,00	Rp10.150.000,00
4	Rp50.000,00	Rp10.200.000,00
5	Rp50.000,00	Rp10.250.000,00

4. Abi meminjam uang sebesar Rp150.000.000,00 di bank untuk membeli sebuah mobil dengan bunga tunggal 7% selama 5 tahun. Akibatnya bunga yang harus dibayarkan Abi sebesar Rp10.500.000,00 per tahun. Abi dapat membayar lunas pinjamannya selama 5 tahun dengan membayarkan Rp3.375.000,00 setiap bulannya.

Masalah mengenai bunga majemuk

1. Sarah menabungkan uangnya sebesar Rp5.000.000,00 di bank yang menjanjikan bunga majemuk 5% per tahun. Setelah 3 tahun, Sarah mengambil semua uangnya. Sarah mendapatkan uang sebesar Rp5.788.125,00 dengan rincian sebagai berikut.

Tahun	Bunga	Saldo
0	0	Rp5.000.000,00
1	Rp250.000,00	Rp5.250.000,00
2	Rp262.500,00	Rp5.512.500,00
3	Rp275.625,00	Rp5.788.125,00

2. Sinta meminjam uang di koperasi untuk membeli mobil sebesar Rp75.000.000,00 dengan bunga majemuk 3% selama 3 tahun. Sinta mendapatkan rincian pinjamannya yang harus dibayarkan di akhir tahun ketiga sebagai berikut.

Tahun	Bunga	Pinjaman
0	0	Rp75.000.000,00
1	Rp2.250.000,00	Rp77.250.000,00
2	Rp2.317.500,00	Rp79.567.500,00
3	Rp2.387.025,00	Rp81.954.525,00

3. Pak Ali meminjam uang di bank untuk membeli motor sebesar Rp20.000.000,00 selama 3 tahun. Bank tersebut memberikan bunga majemuk 5% per tahun yang dikenakan setiap 6 bulan. Berikut adalah rincian pinjaman Pak Ali selama 3 tahun yang disajikan untuk setiap periode penambahan bunga. Pinjaman yang harus dilunasi Pak Ali di tahun ketiga sebesar Rp23.193.862,22.

Periode	Bunga	Pinjaman
0	0	Rp20.000.000,00
1	Rp500.000,00	Rp20.500.000,00
2	Rp512.500,00	Rp21.012.500,00
3	Rp525.312,50	Rp21.537.812,50
4	Rp538.445,31	Rp22.076.257,81
5	Rp551.906,45	Rp22.628.158,26
6	Rp565.703,96	Rp23.193.862,22

4. Rina akan menabung uangnya di bank yang menjanjikan bunga majemuk 9% per tahun yang diberikan setiap 4 bulan sekali. Dia memutuskan untuk menabung sebesar Rp2.000.000,00. Setelah 2 tahun Rina mengambil semua uangnya di bank tersebut sebesar Rp2.388.104,59 dengan rincian setiap periode 4 bulan sebagai berikut.

Periode	Bunga	Saldo
0	0	Rp2.000.000,00
1	Rp60.000,00	Rp2.060.000,00
2	Rp61.800,00	Rp2.121.800,00
3	Rp63.654,00	Rp2.185.454,00
4	Rp65.563,62	Rp2.251.017,62
5	Rp67.530,53	Rp2.318.548,15
6	Rp69.556,44	Rp2.388.104,59

Dari permasalahan yang telah diberikan, tulislah kesimpulan awal atau dugaan awal mengenai apa itu bunga tunggal dan bunga majemuk, barisan atau deret apa yang digunakan untuk menghitung bunga tunggal dan bunga majemuk serta ciri-ciri bunga tunggal dan bunga majemuk. Untuk mengamati cara kerja bunga tunggal dan bunga majemuk, Anda mungkin perlu mengingat deret aritmetika maupun deret geometri.

Anda dapat mendiskusikan hasil dugaan awal dengan siswa/kelompok lainnya untuk mendapatkan hasil yang lebih akurat. Dari dugaan awal tersebut, coba Anda tentukan permasalahan berikut merupakan permasalahan yang melibatkan bunga tunggal atau bunga majemuk dan jelaskan mengapa demikian.

Ayo Mengomunikasikan

Minta siswa membuat kesimpulan mengenai ciri-ciri bunga tunggal dan majemuk serta hubungannya dengan barisan aritmetika atau deret geometri. Kemudian minta siswa menukarkan hasil tulisannya dengan teman sepasang untuk didiskusikan bersama.

Contoh 2.1

Lina mendapatkan tawaran investasi dari dua bank dengan modal investasi yang sama yaitu sebesar Rp20.000.000,00 selama 3 tahun. Bank "*A*" menawarkan bunga tunggal sebesar 8% per tahun, sedangkan Bank "*B*" menawarkan bunga majemuk 7% per tahun. Jika Lina investasi ke Bank "*A*" maka di akhir tahun ketiga Lina akan mendapatkan uang Rp24.800.000,00. Di lain pihak, investasi di Bank "*B*" akan menghasilkan uang Rp24.500.860,00. Karena uang yang didapatkan lebih besar dari Bank "*A*", maka Lina memutuskan untuk menginvestasikan uangnya di Bank "*A*".

Tulislah kesimpulan yang Anda dapatkan tentang apa itu bunga tunggal dan bunga majemuk serta ciri-ciri yang dapat membedakan kedua macam bunga tersebut berdasarkan konsep barisan yang digunakan. Setelah itu Anda dapat mendiskusikan kesimpulan Anda dengan siswa/kelompok lainnya. Secara santun silakan berkomentar satu sama lainnya, memberikan usul dan akhirnya menyepakati ide-ide yang paling tepat menurut kalian.

Alternatif Penyelesaian Contoh 2.1

- Bank "*A*" menawarkan bunga tunggal sedangkan Bank "*B*" menawarkan bunga majemuk
- Berdasarkan saldo akhir yang didapatkan, saldo pada Bank "*A*" mendapatkan tambahan Rp4.800.000,00 selama 3 tahun. Tambahan tersebut merupakan bunga yang diakumulasikan selama 3 tahun dengan bunga Rp1.600.000,00 per tahun, yaitu 8% dari modal awal.
- Saldo pada Bank "*B*" mendapatkan tambahan Rp4.500.860,00 dengan bunga pada tahun pertama sebesar 7% × Rp.20.000.000,00 = Rp1.400.000,00. Jelas bahwa bunga tiap tahunnya akan berbeda karena Rp1.400.000,00 × 3 ≠ Rp4.500.860,00. Ini artinya bunga tahun kedua adalah 7% dari akumulasi saldo awal dan bunga pertama. Begitu pula dengan bunga tahun ketiga, yaitu 7% dari akumulasi bunga tahun kedua dengan saldo akhir sebelumnya.

Kegiatan 2.1.2 Rumus Umum Bunga Tunggal

Dari kesimpulan aktivitas sebelumnya tentu Anda sudah dapat mengetahui permasalahan mana yang menggunakan bunga tunggal dan mana yang bunga majemuk dilihat dari besar bunga tiap tahun atau periode. Hal yang paling sederhana yang dapat diamati mengenai ciri-ciri bunga tunggal adalah besar bunga tiap periode selalu tetap, sedangkan besar bunga majemuk berubah-ubah tiap periodenya bergantung pada modal tiap awal periodenya. Perlu diperhatikan bahwa pembayaran bunga dilakukan setelah satu periode tercapai. Sebagai contoh, jika investasi dilakukan pada tanggal 16 Juni 2014 dengan bunga 8% per tahun, maka bunga akan dibayarkan sekitar tanggal 17 Juni 2015.

Pertanyaan selanjutnya yang mungkin kalian pikirkan adalah bagaimana menentukan besarnya bunga tunggal dan bunga majemuk terhadap investasi atau pinjaman setelah periode tertentu. Secara prinsip, bunga tunggal didapatkan dari modal awal dan besarnya tetap setiap tahunnya. Di lain pihak, bunga majemuk dikenakan terhadap modal yang ditambahkan dengan bunga dari periode sebelumnya.

Dalam subbagian ini akan dibahas lebih jauh mengenai bunga tunggal dan rumus umumnya. Pembahasan mengenai bunga majemuk akan diuraikan pada subbagian berikutnya. Untuk menjawab pertanyaan mengenai bunga tunggal, mari amati beberapa contoh permasalahan bunga tunggal berikut ini.

Contoh 2.2

Rubi menabung di koperasi pegawai yang memberikan bunga tunggal sebesar 4% per tahun. Jika Rubi menabung sebesar Rp2.000.000,00, maka hitunglah uang Rubi setelah 4 tahun menggunakan alternatif jawaban berikut ini.

Tahun	Bunga	Saldo
0		Rp2.000.000,00
1	4% dari Rp2.000.000,00 = Rp80.000,00	Rp2.080.000,00 (2.000.000 + 80.000 = 2.080.000)

- Ajak siswa mengamati Contoh 2.2 dan 2.3 mengenai permasalahan bunga tunggal
- Minta siswa mengamati tabel pada permasalahan masing-masing. Kemudian dengan mengamati pola perhitungan pada tiap tabel, minta siswa untuk melengkapi titik-titik yang ada.

Alternatif Penyelesaian Tabel Contoh 2.2

Tahun	Bunga	Saldo
3	4% dari Rp2.000.000,00 = Rp80.000,00	Rp2.240.000,00 (2.160.000 + 80.000 = 2.000.000 + 3(80.000) =2.240.000)
4	4% dari Rp2.000.000,00 = Rp80.000,00	Rp2.320.000,00 (2.240.000 + 80.000 = 2.000.000 + 4(80.000) = 2.320.000)

Tahun	Bunga	Saldo
2	4% dari Rp2.000.000,00 = Rp80.000,00	Rp2.160.000,00 (2.080.000 + 80.000 = 2.000.000 + 2(80.000) = 2.160.000)
3	4% dari Rp2.000.000,00 = Rp80.000,00	…
4	…	…

Contoh 2.3

Pak Soni membutuhkan dana untuk merenovasi rumahnya. Beliau memutuskan meminjam uang sebesar Rp15.000.000,00 ke koperasi pegawai dengan bunga tunggal 5% per tahun. Pak Soni berencana akan melunasi pinjamannya setelah tahun kelima. Tentukan besar pinjaman Pak Soni yang harus dibayarkan pada akhir tahun ke-5 menggunakan alternatif jawaban berikut ini.

Tahun	Bunga	Pinjaman
0		Rp15.000.000,00
1	5% dari Rp15.000.000,00 = Rp750.000,00	Rp15.750.000,00 (15.000.000 + 750.000 = 15.750.000)
2	5% dari Rp15.000.000,00 = Rp750.000,00	Rp16.500.000,00 (15.750.000 + 750.000 = 15.000.000 + 2(750.000) = 16.500.000)
3	5% dari Rp15.000.000,00 = Rp750.000,00	Rp17.250.000,00 (16.500.000 + 750.000 = 15.000.000,00 + 3(750.000) = 17.250.000)
4	…	…
5	…	…

Alternatif Penyelesaian Tabel Contoh 2.3

Tahun	Bunga	Saldo
4	5% dari Rp15.000.000,00 = Rp750.000,00	Rp18.000.000,00 (17.250.000 + 750.000 = 15.000.000 + 4(750.000) = 18.000.000)
5	5% dari Rp15.000.000,00 = Rp750.000,00	Rp18.750.000,00 (18.000.000 + 750.000 = 15.000.000 + 5(750.000) = 18.750.000)

Setelah mengamati kedua contoh sebelumnya, buatlah pertanyaan-pertanyaan mengenai bunga tunggal. Usahakan pertanyaan Anda memuat kata-kata "bunga ke-n", "saldo ke-n", "pinjaman ke-n", "barisan aritmetika".

Berdasarkan pada pertanyaan-pertanyaan yang Anda buat sebelumnya, mungkin ada pertanyaan-pertanyaan yang Anda ajukan seperti di bawah ini.

Bagaimana menentukan bunga ke-n untuk permasalahan bunga tunggal?
Bagaimana menentukan saldo ke-n untuk permasalahan bunga tunggal?
Konsep barisan atau deret apakah yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan bunga tunggal?

Untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan tersebut, amati alternatif jawaban pada kedua tabel yang disajikan dalam Contoh 2.2 dan 2.3. Sebelum menentukan rumus umumnya, mungkin ada baiknya jika Anda mencoba menentukan saldo atau pinjaman pada tahun tertentu, misalnya pada tahun ke-10. Buatlah dugaan sementara mengenai rumus umum bunga tunggal. Gunakan buku referensi lain, internet, atau sumber lainnya yang dapat mendukung dugaan sementara Anda.

Minta siswa untuk membuat pertanyaan mengenai informasi yang didapatkan dalam proses pengamatan sebelumnya.

Contoh Pertanyaan:

Bagaimana menentukan saldo simpanan dengan bunga tunggal pada akhir tahun ke-n?

Ayo Menggali Informasi

- Minta siswa untuk mengamati kembali tabel pada contoh 2.2 dan 2.3 serta pertanyaan-pertanyaan yang sudah dibuat.
- Minta siswa menentukan saldo pada tahun-tahun tertentu (misal tahun ke-10) pada contoh 2.2 dan 2.3.
- Minta siswa membuat dugaan sementara tentang rumus bunga tunggal dengan informasi yang sudah didapat.

Ajak siswa untuk mengamati permasalahan yang diberikan dan melengkapi titik-titik yang ada. Kemudian minta siswa menyelesaikan permasalahan yang diminta.

Untuk lebih menguatkan hasil pengamatan Anda, berikut disajikan permasalahan lainnya.

Contoh 2.4

Sofi menabung uang hasil kerja sambilan sebesar Rp2.000.000,00 di bank yang menawarkan bunga tunggal 8% per tahun. Jika Sofi tidak pernah mengambil uangnya selama 4 tahun, maka besar saldo yang dimiliki Sofi dapat dihitung dengan melengkapi tabel berikut ini.

Tahun	Bunga	Saldo
0	0	Rp2.000.000,00
1	8% dari 2.000.000 = ...	Rp... (2.000.000 + … = …)
2	…	Rp... (2.000.000 + … +… = 2.000.000 + 2(…) = …)
3	…	Rp... (2.000.000 + … + … + … = 2.000.000 + 3(…) = …)
4	…	Rp... (2.000.000 + … +… + … + … = 2.000.000 + 4(…) = …)

Dapatkah Anda menghitung total saldo tabungan Sofi pada akhir tahun ke-10? Dengan menggunakan konsep barisan aritmetika, besar saldo tabungan Sofi setelah tahun ke-10 adalah ….

Dengan pola yang sama untuk mencari saldo tahun ke-10, Anda juga dapat menghitung total saldo untuk tahun-tahun lainnya.

Selanjutnya, jika diperhatikan pola penambahan bunga setiap tahunnya maka total bunga pada akhir tahun ke-n adalah

$2.000.000,00 \times 8\% \times n = ...$

Alternatif Penyelesaian Contoh 2.4

Tahun	Bunga	Saldo
1	Rp160.000,00	Rp2.160.000,00 (2.000.000 + 160.000 = 2.160.000,00
2	Rp160.000,00	Rp2.320.000,00 (2.000.000 + 2(160.000) = 2.320.000)
3	Rp160.000,00	Rp2.480.000,00 (2.000.000 + 3(160.000) = 2.480.000)
4	Rp160.000,00	Rp2.640.000,00 (2.000.000 + 4(160.000) = 2.640.000)

Dengan demikian total saldo di tabungan Sofi pada akhir tahun ke-4 adalah Rp2.640.000,00.

Total saldo tahun ke-10 merupakan suku ke-11 barisan aritmetika dengan suku pertama Rp2.000.000,00 dan beda Rp160.000,00. Sehingga total saldo tahun ke-10 adalah 2.000.000 + (11–1) (160.000) = 3.600.000

Total bunga pada akhir tahun ke-n adalah $(n)(160.000)$.

Sehingga total saldo Sofi pada akhir tahun ke-n adalah

$2.000.000\ (1 + (n)(0,08)) = 2.000.000 + (n)(160.000)$.

Dengan demikian total saldo yang akan diterima Sofi pada tahun ke-n adalah
$2.000.000 + (2.000.000 \times 8\% \times n)$
$= 2.000.000 (1 + (8\% \times n))$
=...

Berikut diberikan contoh lainnya tentang bunga tunggal. Anda dapat menyelesaikan soal berikut dengan cara yang serupa dengan contoh sebelumnya atau dengan cara lainnya yang Anda kuasai.

Contoh 2.5

Susi ingin membeli laptop edisi terbaru dengan harga Rp8.000.000,00. Untuk itu, dia meminjam uang seharga laptop tersebut dengan bunga tunggal 6%. Jika Susi ingin melunasi pinjaman tersebut setelah tahun keempat, tentukan

1. total pinjaman Susi pada akhir tahun ke-4,
2. total pinjaman Susi pada akhir tahun ke-7,
3. total bunga pada akhir tahun ke-n,
4. total pinjaman Susi pada akhir tahun ke-n.

Jika modal awal tabungan atau pinjaman dilambangkan oleh M, suku bunga per tahun yang ditawarkan dilambangkan oleh r, dan lamanya tabungan atau pinjaman adalah n tahun, maka untuk menentukan rumus umum bunga tunggal tahun ke-n, jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut.

1. Berapakah besar bunga tiap tahunnya?
2. Berapakah total bunga pada akhir tahun ke-n?
3. Berapakah total saldo atau pinjaman pada akhir tahun ke-n?
4. Konsep barisan apakah yang dapat digunakan dalam menghitung bunga tunggal?

Alternatif Penyelesaian
Contoh 2.5

1. Total pinjaman Susi pada akhir tahun ke-4: Rp9.920.000,00.
2. Total pinjaman Susi pada akhir tahun ke-7: Rp11.360.000,00.
3. Total bunga pada akhir tahun ke-n:

   $n \times 0,06 \times 8.000.000$

   $= n \times 480.000$
4. Total pinjaman Susi pada akhir tahun ke-n:

   $8.000.000 + n\ 480.000.$

Jika M = modal awal, r = suku bunga tunggal per tahun, n = lama simpanan atau pinjaman dalam tahun, maka

1. Bunga tiap tahun : $M \times r$
2. Total bunga pada akhir tahun ke-n : $M \times r \times n$
3. Saldo akhir tahun ke-n : $M + (M \times r \times n) = M(1 + rn)$
4. Saldo akhir simpanan atau pinjaman dengan bunga tunggal tiap tahun membentuk suku-suku barisan aritmetika dengan modal sebagai suku pertama dan besar bunga tiap tahun sebagai beda barisan aritmetika. Sehingga saldo akhir tahun ke-n adalah suku ke-(n + 1) dari barisan aritmetika tersebut, yaitu $M + (n + 1 - 1)(M \times r) = M(1 + rn)$

Tuliskan jawaban-jawaban Anda dalam kotak yang tersedia di bawah ini.

Sistem pembayaran bunga pada simpanan ataupun pinjaman juga dapat dibayarkan lebih dari satu kali dalam satu tahun. Sebagai contoh, suku bunganya sebesar 10% per tahun, tetapi bunga yang dibayarkan setiap 4 bulan sekali. Perhatikan contoh-contoh berikut.

Contoh 2.6

Sofi menabung uangnya sebesar Rp2.000.000,00 dengan bunga tunggal 8% per tahun. Jika bunga akan dibayarkan setiap 3 bulan sekali, maka tentukan:

1. bunga yang dibayarkan setiap periode,
2. total saldo pada akhir tahun ke-4,
3. total saldo pada akhir bulan ke-57,
4. total saldo pada akhir tahun ke-n.

Perhatikan bahwa bunga yang akan didapatkan Sofi per tahun adalah 8% dari 2.000.000 = 160.000.

a. Jika bunga dibayarkan setiap 3 bulan sekali, maka bunga akan dibayarkan sebanyak 4 kali dalam satu tahun (mengapa?).
   Dengan demikian bunga yang dibayarkan setiap periode adalah sebesar
   $\frac{1}{4} \times 160.000 = \ldots$

b. Karena terdapat 4 periode pembayaran bunga dalam satu tahun, maka terdapat 16 periode pembayaran bunga dalam 4 tahun (mengapa?) sehingga total bunga pada akhir tahun ke-4 adalah

Alternatif Penyelesaian Contoh 2.6

1. Karena 1 tahun ada 12 bulan, sehingga bunga dibayarkan sebanyak 4 kali. Satu periode pembayaran bunga adalah 3 bulan.

   Bunga tiap periode sebesar Rp40.000,00.
2. Total bunga pada akhir tahun ke-4 adalah Rp640.000,00.

   Saldo tabungannya menjadi Rp2.640.000,00.
3. Saldo tabungan akhir bulan ke-57 adalah Rp2.760.000,00.
4. Saldo akhir tahun ke-n adalah 2.000.000 $(1 + (n)(0{,}08))$.

   Sedangkan saldo tabungan pada akhir periode ke-t adalah

   $$2.000.000\left(1 + \frac{t}{4} \times 0{,}08\right)$$

$$16 \times \frac{1}{4} \times 160.000 = ...$$

Jadi, saldo tabungan pada akhir tahun ke-4 adalah

$$2.000.000 + (16 \times \frac{1}{4} \times 160.000)$$

$$= 2.000.000 + (16 \times \frac{1}{4} \times 8\% \times 2.000.000)$$

$$= 2.000.000\ (1 + (16 \times \frac{1}{4} \times 8\%))$$

$$= ...$$

c. Pada akhir bulan ke-57, terdapat 19 periode pembayaran bunga (mengapa?), sehingga saldo tabungannya menjadi

$$2.000.000 + (19 \times \frac{1}{4} \times 160.000)$$

$$= 2.000.000\ (1 + (19 \times \frac{1}{4} \times 8\%))$$

$$= ...$$

d. Pada akhir tahun ke-n, terdapat $4n$ kali pembayaran bunga (mengapa?), sehingga total bunga pada akhir tahun ke-n adalah

$$4n \times \frac{1}{4} \times 160.000 = ...$$

Jadi, saldo tabungan pada akhir tahun ke-n adalah

$$2.000.000 + (4n \times \frac{1}{4} \times 160.000)$$

$$= 2.000.000\ (1 + (4n \times \frac{1}{4} \times 8\%))$$

$$= ...$$

Dengan menggunakan cara yang serupa dengan penyelesaian contoh di atas atau dengan cara lainnya yang Anda kuasai, coba selesaikan permasalahan berikut pada kotak yang sudah disediakan.

Ayo Mengomunikasikan

Minta siswa untuk menuliskan kesimpulan yang didapatkan mengenai bunga tunggal dan rumus umumnya. Kemudian minta beberapa siswa mempresentasikan hasil masing-masing di depan kelas dan selanjutnya dibahas. Minta siswa lainnya untuk ikut menyempurnakan kesimpulan yang dibuat.

Contoh 2.7

Ali menabung di bank sebesar Rp5.000.000,00 dengan bunga 7% yang dibayarkan setiap bulan. Tentukan saldo tabunganya pada akhir bulan ke-30 dan tentukan pula saldo tabungannya pada akhir tahun ke-*n*.

Perhatikan Contoh 2.6 dan Contoh 2.7. Jika modal awal dilambangkan dengan M, bunga tunggal yang ditawarkan adalah r per tahun, tetapi bunga dibayarkan sebanyak k kali dalam setahun, maka tuliskanlah rumus umum saldo tabungan setelah t periode.

Ayo Mengomunikasikan

Tulislah kesimpulan yang Anda dapatkan dari kegiatan di atas di dalam kotak yang sudah disediakan. Diskusikan dengan teman atau kelompok lainnya dengan santun mengenai kesimpulan yang sudah dibuat.

Alternatif Penyelesaian Contoh 2.7

a. Saldo tabungan Ali pada akhir bulan ke-30 adalah Rp5.875.000,00
b. Saldo tabungan pada akhir tahun ke-*n* adalah Rp5.000.000,00 (1 + (n)(0,07))

Berdasarkan Contoh 2.6 dan 2.7

Jika M = modal awal, r = suku bunga tunggal per tahun, n = lama simpanan dalam tahun, bunga dibayarkan sebanyak k kali dalam satu tahun, maka total saldo pada akhir periode ke-t adalah $M\left(1+t\times\frac{1}{k}\times r\right)=M\left(1+\frac{r\times t}{k}\right)$

Sesudah Pelaksanaan Pembelajaran

- Ajak siswa melakukan refleksi terhadap kegiatan pembelajaran.
- Berikan soal tambahan sebagai latihan soal di rumah (bila perlu).
- Minta siswa untuk memberikan usulan mengenai perbaikan pembelajaran.

Latihan 2.1.2

1. Jika Budi menabung uangnya yang sebesar Rp3.000.000,00 di bank dengan bunga tunggal yang ditawarkan sebesar 6%, maka tentukan total saldo tabungannya pada akhir tahun ke-6.
2. Hana menabung uangnya sebesar Rp500.000,00 dengan bunga tunggal 5,5% yang dibayarkan setiap 6 bulan sekali. Berapakah saldo tabungan Hana jika dia mengambil uangnya setelah 42 bulan?
3. Berapakah total saldo yang diterima dalam waktu 30 bulan jika Adi menabung uangnya sebesar Rp8.000.000,00 dengan bunga 4% per tahun?
4. Jika Santi menabung sebesar Rp5.000.000,00, dia mendapat bunga sebesar Rp93.750,00 dalam waktu 9 bulan. Tentukan suku bunga tunggal per tahun yang ditawarkan.
5. Pak Juni meminjam uang sebesar Rp12.000.000,00 di sebuah BPR dengan bunga tunggal 6,5% per tahun. Tentukan lama pinjaman Pak Juni jika beliau mengembalikan uang pinjaman tersebut sebesar Rp15.900.000,00.

Pengayaan

6. Berapa tahun yang dibutuhkan Abi untuk mendapatkan saldo dua kali lipat jika ia menabung sebesar Rp3.000.000,00 dengan bunga tunggal 5% per tahun?
7. Dita meminjam uang di dua BPR yang berbeda dengan masa pinjaman keduanya adalah 3 tahun. Total bunga tunggal dari kedua BPR yang harus ia bayarkan adalah Rp1.125.000,00. Dita meminjam uang sebesar Rp5.000.000,00 pada BPR A dengan bunga tunggal 3.5%. Sedangkan BPR B menawarkan bunga tunggal 4% per tahun.

   Tentukan besar pinjaman Dita pada BPR B.

Alternatif Penyelesaian Latihan 2.1.2

1. Saldo tabungan pada akhir tahun ke-6 adalah Rp4.080.000,00.
2. Terdapat 2 periode dalam 1 tahun dan disimpan selama 7 periode, sehingga saldo tabungannya setelah 42 bulan adalah Rp596.250,00.
3. Rp8.800.000,00.
4. Bunga dalam 1 tahun sebesar Rp125.000,00. Suku bunganya sebesar 2,5%.
5. Lama pinjaman = bunga yang dibayarkan/bunga tiap tahun. Pak Juni meminjam selama 5 tahun.

Pengayaan

6. Agar saldo Abi dua kali lipat, bunga yang didapatkan harus sebesar Rp3.000.000,00. Sehingga diperoleh persamaan $nr(3.000.000) = 3.000.000$. Dengan demikian $n = \frac{1}{r}$, yaitu selama 20 tahun.

7. Misal M adalah besar pinjaman di BPR B. Setelah menghitung bunga yang dibayarkan untuk BPR A, maka didapatkan bunga yang dibayarkan untuk BPR B sebesar Rp600.000,00. Karena $M \times 3 \times 0,04 = 600.000$, maka besar pinjaman di BPR B, yaitu M, dapat ditentukan.

1. Tentukan total saldo akhir dari tiap simpanan berikut.
   a. Modal Rp3.000.000,00 dengan bunga tunggal 6% selama 2,5 tahun.
   b. Modal Rp5.000.000,00dengan bunga tunggal 8,5% selama 20 bulan.
   c. Modal Rp7.000.000,00 dengan bunga tunggal 11% selama 2 tahun 8 bulan.
2. Hitung besar bunga yang didapatkan Luki jika dia menyimpan uang sebesar Rp4.500.000,00 dengan bunga tunggal 6% selama 18 bulan.
3. Tentukan besar modal yang harus disimpan agar Andi memperoleh saldo Rp7.000.000,00 dengan bunga tunggal 8% per tahun selama 5 tahun.
4. Berapakah besar uang yang harus disimpan pada tabungan dengan bunga tunggal 6% per tahun agar saldonya menjadi Rp8.000.000,00 tujuh bulan kemudian?
5. Tentukan modal awal simpanan untuk mendapatkan saldo sebesar Rp2.850.000,00 dengan bunga tunggal 7% selama 2 tahun.
6. Tentukan waktu yang dibutuhkan agar simpanan sebesar Rp2.000.000,00 menjadi Rp2.490.000,00 jika bunga tunggal yang ditawarkan adalah 7% per tahun.
7. Tentukan suku bunga yang ditawarkan oleh suatu bank jika dengan modal Rp5.000.000,00 akan mendapatkan saldo Rp6.100.000,00 dalam waktu 2 tahun 9 bulan.
8. Lukman ingin pergi ke Lombok 18 bulan lagi. Saat ini dia mempunyai uang sebesar Rp2.000.000,00. Agar pada saat pergi dia mempunyai uang Rp2.240.000,00, maka berapa besar suku bunga tunggal yang harus dipilih Lukman untuk tabungannya?
9. Dita meminjam uang untuk membeli laptop terbaru seharga Rp8.000.000,00. Jangka waktu pinjamannya adalah 2 tahun dengan bunga tunggal 9% per tahun. Tentukan besar cicilan Dita per bulan.
10. Pak Jani ingin meminjam uang sebesar Rp50.000.000,00 untuk biaya sekolah anaknya. Beliau mendapat tawaran dari dua bank. Bank *A* menawarkan bunga tunggal 5% untuk jangka waktu 3 tahun, sedangkan Bank *B* menawarkan bunga tunggal 4% untuk jangka waktu 4 tahun. Manakah yang memberikan tawaran yang termurah untuk Pak Jani? Jelaskan.

1. (a) Rp6.450.000,00; (b) Rp5.708.333,33; (c) Rp9.053.333,33
2. Rp405.000,00
3. Jika besar modal adalah M, maka besar M didapatkan dari persamaan $7.000.000 = M(1 + (0{,}08 \times 5))$
4. M didapatkan dari persamaan $8.000.000 = M\left(1 + \left(0{,}06 \times \frac{7}{12}\right)\right)$.
5. M didapatkan dari persamaan $2.850.000 = M(1 + (0{,}07 \times 2))$.
6. Waktu t didapatkan dari persamaan $2.490.000 = 2.000.000\,(1 + (0{,}07 \times t))$.
7. Bunga r didapatkan dari persamaan $6.100.000 = 5.000.000\left(1 + \frac{33}{12}r\right)$.
8. Bunga r didapatkan dari persamaan $2.240.000 = 2.000.000\left(1 + \frac{18}{12}r\right)$.
9. Total pinjaman dengan bunga adalah $8.000.000\,(1 + (0{,}09 \times 2)) = 9.440.000$. Cicilan per bulan Dita sebesar Rp393.333,33.
10. Bank A

Kegiatan Sebelum Pembelajaran

- Ajak siswa untuk mengingat kembali perbedaan bunga tunggal dan bunga majemuk.
- Minta siswa mengingat kembali hubungan barisan aritmetika dengan bunga tunggal.
- Ajak siswa untuk menduga barisan atau deret apa yang berkaitan dengan bunga majemuk.

Minta siswa mengamati Contoh 2.8 dan 2.9 sekaligus melengkapi titik-titik yang ada dengan mengamati pola hitungan sebelumnya.

Kegiatan 2.1.3 Rumus Umum Bunga Majemuk

Setelah mengetahui rumus umum tahun ke-n untuk bunga tunggal, pertanyaan selanjutnya yang harus dijawab adalah bagaimana menentukan rumus umum tahun ke-n untuk bunga majemuk. Perlu diingat bahwa untuk menentukan bunga tunggal tiap tahun, modal yang dikalikan dengan prosentase bunga adalah modal awal. Sedangkan pada bunga majemuk, bunga yang didapatkan di setiap tahunnya ditambahkan ke modal sebelumnya untuk mendapatkan modal yang baru. Sehingga bunga di tahun berikutnya merupakan hasil kali dari suku bunga dengan modal yang baru. Hal ini yang mengakibatkan bunga majemuk tiap tahunnya berubah-ubah.

Untuk mengetahui lebih dalam mengenai bunga majemuk, amati permasalahan-permasalahan berikut.

Contoh 2.8

Joko menabungkan uangnya sebesar Rp2.000.000,00 di bank dengan bunga majemuk 4%. Besar saldo Joko pada akhir tahun ke-4 disajikan dalam alternatif penyelesaian berikut.

Tahun	Bunga	Saldo
0		Rp2.000.000,00
1	4% dari Rp2.000.000,00 = Rp80.000,00	Rp2.080.000,00 (2.000.000 + 80.000 = 2.080.000)
2	4% dari Rp2.080.000,00 = Rp83.200,00	Rp2.163.200,00 (2.080.000 + 83.200 = 2.163.200)
3	4% dari Rp2.163.200,00 = Rp86.528,00	…
4	…	…

Alternatif Penyelesaian Contoh 2.8

Saldo tahun ke-3: 2.163.200 + 86.528 = 2.249.728.

Bunga tahun ke-4 : 4% dari Rp2.249.728,00 = Rp89.989,12.

Saldo tahun ke-4 : 2.249.728 + 89.989,12 = 2.339.717,12.

Contoh 2.9

Tika meminjam uang di bank yang menawarkan bunga majemuk 5% dengan besar pinjaman Rp15.000.000,00 selama 5 tahun. Tika harus mengembalikan pinjamannya sebesar Rp19.144.223,54 dengan rincian sebagai berikut.

Tahun	Bunga	Pinjaman
0		Rp15.000.000,00
1	5% dari Rp15.000.000,00 = Rp750.000,00	Rp15.750.000,00 (15.000.000 + 750.000 = 15.750.000)
2	5% dari Rp15.750.000,00 = Rp787.500,00	Rp16.537.500,00 (15.750.000 + 787.500 = 16.537.500)
3	…	…
4	5% dari Rp17.364.375,00 = …	…
5	…	…

Ayo Menanya

Setelah mengamati kedua contoh bunga majemuk di atas, coba buat pertanyaan-pertanyan mengenai bunga majemuk. Usahakan pertanyaan Anda memuat kata-kata "saldo ke-n", "bunga ke-n", "rumus umum", "barisan geometri".

Minta siswa untuk membuat pertanyaan berkaitan dengan informasi yang didapatkan dalam proses pengamatan.

Contoh pertanyaan :

Bagaimana rumus umum saldo simpanan dengan bunga majemuk pada akhir tahun ke-n?

Alternatif Penyelesaian Tabel Contoh 2.9

Tahun	Bunga	Pinjaman
3	Rp826.875,00.	Rp17.364.375,00.
4	Rp868.218,75.	Rp18.232.594,75.
5	Rp911.628,69.	Rp19.144,223,44.

- Minta siswa untuk mengamati kembali tabel pada Contoh 2.8 dan 2.9 serta pertanyaan-pertanyaan yang sudah dibuat.
- Minta siswa menentukan saldo pada tahun-tahun tertentu (misal tahun ke-6) pada Contoh 2.8 dan 2.9.
- Minta siswa membuat dugaan sementara tentang rumus bunga majemuk dengan informasi yang sudah didapat.

Ayo Menggali Informasi

Dari pertanyaan-pertanyaan sebelumnya, mungkin pertanyaan Anda diantaranya adalah

a. Bagaimana menentukan bunga majemuk pada akhir tahun tahun ke-n?
b. Bagaimana menentukan total bunga majemuk pada akhir tahun ke-n?
c. Bagaimana menentukan total saldo atau pinjaman pada akhir tahun ke-n?
d. Konsep barisan atau deret apakah yang bisa digunakan untuk menghitung bunga majemuk?

Untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan di atas, mungkin ada baiknya jika Anda coba tentukan saldo tabungan pada akhir tahun tertentu, akhir tahun ke-10 misalnya. Kemudian carilah bentuk yang mirip dari setiap tahunnya. Dengan demikian Anda dapat menentukan saldo tahun ke-n dengan lebih mudah.

Buatlah dugaan sementara mengenai rumus umum bunga majemuk dari pengamatan Anda. Gunakan buku referensi lain, internet atau sumber lainnya untuk mendukung dugaan sementara Anda.

Untuk lebih menguatkan kesimpulan sementara yang Anda buat, amati contoh berikut ini.

Contoh 2.10

Pak Purba menyimpan uang di Bank sebesar Rp10.000.000,00 dengan bunga majemuk 3%. Besar tabungan Pak Purba di akhir tahun ke-4 dapat kita hitung dengan uraian sebagai berikut.

Bunga akhir tahun 1 : 3% dari 10.000.000 = 300.000

Saldo akhir tahun 1:

$$\begin{aligned} & 10.000.000 + 300.000 \\ &= 10.000.000 + (10.000.000 \times 3\%) \\ &= 10.000.000 + (1 + 0{,}03) \\ &= 10.300.000 \end{aligned}$$

Jadi saldo akhir tahun ke 1 adalah Rp10.300.000,00.

Minta siswa untuk mengamati contoh 2.10 dan 2.11 mengenai masalah bunga majemuk dan mengisi titik-titik yang ada.

Kemudian, minta siswa menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang disediakan.

Bunga akhir tahun 2 : 3% dari 10.300.000 = 309.000

Saldo akhir tahun 2 :

10.000.000 + 300.000 + 309.000

= 10.000.000 + (1 + 0,03) + 309.000

= 10.000.000 + (1 + 0,03) + 10.000.000 (1 + 0,03) × 0,03)

= 10.000.000 (1 + 0,03) (1 + 0,03)

= 10.000.000 $(1 + 0{,}03)^2$

= 10.609.000

Jadi saldo akhir tahun 2 adalah Rp10.605.000,00

Bunga akhir tahun 3 : 3% dari 10.609.000 = 318.270

Saldo akhir tahun 3 :

10.000.000 + 300.000 + 309.000 + 318.270

= 10.000.000 + $(1 + 0{,}03)^{...}$ + 318.270

= 10.000.000 + $(1 + 0{,}03)^{...}$ + 10.000.000 $(1 + 0{,}03)^{...}$ × 0,03)

= 10.000.000 $(1 + 0{,}03)^{...}$ × (1 + 0,03)

= 10.000.000 $(1 + 0{,}03)^{...}$

= 10.927.270

Jadi saldo akhir tahun 3 adalah Rp10.927.270,00

Bunga akhir tahun 4 : 3% dari ... = ...

Saldo akhir tahun 4 : ...

Dengan demikian, besar saldo tabungan Pak Purba di akhir tahun keempat adalah …

Dengan cara yang sama, dapatkah Anda menghitung saldo tabungan beliau jika tidak mengambil uangnya selama 8 tahun?

Total saldo yang dimiliki Pak Purba di akhir tahun ke-8 adalah sebesar …

Lalu bagaimana dengan total saldo yang dimiliki pada akhir tahun ke-20?

Jika diperhatikan pola saldo setiap akhir tahunnya, maka saldo Pak Purba pada akhir tahun ke-*n* adalah …

Untuk lebih memperjelas cara menyelesaikan permasalahan bunga majemuk, berikut diberikan contoh lainnya. Coba Anda selesaikan permasalahan berikut dengan cermat.

Alternatif Penyelesaian

Contoh 2.10

Bunga tahun ke-4: 3% dari Rp10.927.270,00 = Rp327.818,10.

Saldo akhir tahun ke-4 :

10.000.000 + 300.000 + 309.000 + 318.270 + 327.818,10

= 10.000.000 $(1 + 0{,}03)^3$ + 318.270

= 10.000.000 $(1 + 0{,}03)^3$ + (10.000.000 $(1 + 0{,}03)^3$ × 0,03)

= 10.000.000 $(1 + 0{,}03)^3$ × (1 + 0,03)

= 10.000.000 $(1 + 0{,}03)^4$ = 11.255.088,10

Dengan demikian saldo tabungan Pak Purba di akhir tahun ke-4 adalah Rp11.255.088,10.

Dengan menggunakan pola bentuk bilangan pada saldo tiap akhir tahun, saldo akhir tahun ke-8 adalah = 10.000.000 $(1 + 0{,}03)^8$ = 12.667.700,81.

Saldo di akhir tahun ke-10 adalah = 10.000.000 $(1 + 0{,}03)^{10}$ = 13.439.163,79.

Saldo pada akhir tahun ke-*n* adalah = 10.000.000 $(1 + 0{,}03)^n$

Alternatif Penyelesaian
Contoh 2.11

a. Mencari bunga pada tahun ke-4 bisa dengan cara menghitung bunga dan saldo tiap tahun mulai dari tahun pertama. Cara lain yang dapat digunakan adalah dengan mencari selisih saldo tahun ke-4 dengan saldo tahun ke-3.

   Saldo tahun ke-4 :

   Rp4.679.434,24 Sedangkan saldo tahun ke-3 :

   Rp4.499.456,00. Sehingga bunga yang didapatkan Pak Purba pada akhir tahun ke-4 adalah Rp179.978,24.

b. Saldo akhir tahun ke-4 adalah Rp4.679.434,24.

c. Saldo akhir tahun ke-15 adalah Rp7.203.774,02.

Contoh 2.11

Andi menyimpan uang sebesar Rp4.000.000,00 di bank dengan bunga 4% per tahun. Tentukanlah:

a. bunga yang diterima Andi pada akhir tahun ke-4,
b. saldo akhir tahun ke-4,
c. saldo yang dimiliki Andi pada akhir tahun ke-15,
d. saldo yang dimiliki Andi pada akhir tahun ke-n.

Jika *modal awal* simpanan atau pinjaman dilambangkan dengan M, suku bunga majemuk per tahun dilambangkan dengan r, dan waktu simpanan atau pinjaman selama n tahun, maka untuk menentukan rumus umum bunga majemuk tahun ke-n, jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut.

a. Bagaimana cara menghitung bunga majemuk setiap tahunnya?
b. Berapakah total bunga majemuk pada akhir tahun ke-n?
c. Berapakah total saldo pada akhir tahun ke-n?
d. Konsep barisan apakah yang digunakan untuk menghitung saldo setiap tahun dengan bunga majemuk?

Seperti halnya bunga tunggal, bunga majemuk juga dapat dibayarkan beberapa kali dalam setahun. Untuk bunga majemuk yang dibayarkan lebih dari satu kali dalam satu tahun, perhatikan permasalahan berikut.

d. Saldo pada akhir tahun ke-n adalah Rp4.000.000,00 $(1 + 0{,}04)^n$.

Jika M = modal awal, r = suku bunga majemuk per tahun, n = lama simpanan atau pinjaman dalam tahun, maka

a. Bunga majemuk tiap tahun dihitung dari besar persentase bunga dikalikan dengan total saldo tahun sebelumnya. Sebagai contoh, bunga pada akhir tahun ke-2 didapatkan dari perkalian persentase bunga dengan saldo di akhir tahun pertama.

b. Total bunga pada akhir tahun ke-n adalah total saldo pada akhir tahun ke-n dikurangi dengan modal awal.

c. Total saldo akhir tahun ke-n adalah $M(1 + r)^n$.

d. Saldo pada akhir tiap tahun pada bunga majemuk merupakan barisan geometri dengan suku pertama adalah $M(1 + r)$ yaitu saldo pada akhir tahun pertama, sedangkan rasionya adalah $(1 + r)$. Sehingga saldo di akhir tahun ke-n adalah $M(1 + r)(1 + r)^{n-1} = M(1 + r)^n$

Contoh 2.12

Lia menabung uangnya sebesar Rp5.000.000,00 di suatu bank yang memberikan bunga 3% per tahun yang dibayarkan setiap 6 bulan sekali. Besar saldo tabungan Lia setelah 3 tahun dapat dihitung sebagai berikut.

Tahun 1

a. **Periode 1 (6 bulan pertama)**

Bunga : $\frac{3}{2}$% dari 5.000.000 = 75.000

Tahukah Anda mengapa suku bunganya dibagi dengan 2?

Saldo :

$5.000.000\ (1 + \frac{3}{2}\%)$

$= 5.075.000$

Jadi saldo periode 1 (6 bulan pertama) adalah Rp5.075.000,00

b. **Periode 2 (6 bulan kedua)**

Bunga : $\frac{3}{2}$% dari 5.075.000 = 76.125

Saldo :

$5.075.000 + 76.125$

$= 5.000.000\ (1 + \frac{3}{2}\%) + (\frac{3}{2}\% \times (5.000.000\ (1 + \frac{3}{2}\%)))$

$= 5.000.000\ (1 + \frac{3}{2}\%)(1 + \frac{3}{2}\%)$

$= 5.000.000\ (1 + \frac{3}{2}\%)^2$

$= 5.151.125$

Jadi saldo periode 2 (6 bulan kedua) adalah Rp5.151.125,00

Tahun 2

a. **Periode 3 (6 bulan ketiga)**

Bunga : $\frac{3}{2}$% dari 5.151.125 = ...

Saldo :

5.151.125 + ...

$= 5.000.000\ (1 + \frac{3}{2}\%)^2 + (\frac{3}{2}\% \times (5.000.000(1 + \frac{3}{2}\%)^2))$

$= 5.000.000\ (1 + \frac{3}{2}\%)^2(...)$

$= 5.000.000\ (1 + \frac{3}{2}\%)^{...}$

= 5.228.391,88

Jadi saldo periode 3 (6 bulan ketiga) adalah Rp5.228.391,88 ,00

b. Periode 4 (6 bulan keempat)

Bunga : $\frac{3}{2}$% dari 5.228.391,88 = ...

Saldo :

5.228.391,88 + ...

$= 5.000.000\ (1 + \frac{3}{2}\%)^{...} + (\frac{3}{2}\% \times (5.000.000(1 + \frac{3}{2}\%)^{...}))$

$= 5.000.000\ (1 + \frac{3}{2}\%)^{...}(...)$

$= 5.000.000\ (1 + \frac{3}{2}\%)^{...}$

= 5.306.817,76

Jadi saldo periode 4 (6 bulan keempat) adalah Rp5.306.817,76

Tahun 3

a. Periode 5 (6 bulan kelima)

Bunga : $\frac{3}{2}$% dari 5.306.817,76 = ...

Saldo :

5.306.817,76 + ...

$= 5.000.000\ (1 + \frac{3}{2}\%)^{...} + (\frac{3}{2}\% \times (5.000.000(1 + \frac{3}{2}\%)^4))$

$= 5.000.000\ (1 + \frac{3}{2}\%)^{...}(...)$

$= 5.000.000\ (1 + \frac{3}{2}\%)^{...}$

$= 5.386.420,03$

Jadi saldo periode 5 (6 bulan kelima) adalah Rp5.386.420,03

b. Periode 6 (6 bulan keenam)

Bunga : $\frac{3}{2}\%$ dari 5.386.420,03 = ...

Saldo :

5.386.420,03 + ...

$= 5.000.000\ (1 + \frac{3}{2}\%)^{...} + (\frac{3}{2}\% \times (5.000.000(1 + \frac{3}{2}\%)^{...}))$

$= 5.000.000\ (1 + \frac{3}{2}\%)^{...}(...)$

$= 5.000.000\ (1 + \frac{3}{2}\%)^{...}$

$= 5.467.216,33$

Jadi saldo periode 6 (6 bulan keenam) adalah Rp5.467.216,33

Jika diamati lebih teliti mengenai saldo di setiap periode, tentukan total saldo di akhir periode ke-20.

Tentukan pula total saldo yang dimiliki Lia pada akhir tahun ke-20. Apakah sama dengan saldo di akhir periode ke-20?

Selanjutnya, tentukan saldo di tabungan Lia pada akhir tahun ke-n.

Dengan mengamati contoh dan penyelesaiannya di atas, coba Anda selesaikan permasalahan berikut dengan cara yang serupa atau cara lain yang Anda kuasai.

Contoh 2.13

Anto meminjam uang sebesar Rp6.000.000,00 dengan bunga majemuk 8% per tahun yang dibayarkan setiap 3 bulan. Tentukan besar total pinjaman Anto selama 2 tahun jika ia tidak pernah mencicil pinjamannya selama masa tersebut.

Alternatif Penyelesaian Contoh 2.12

Total saldo yang dimiliki di akhir periode ke-20 adalah $5.000.000\ (1+0,015)^{20}$. Sedangkan total saldo di akhir tahun ke-20 adalah $5.000.000\ (1+0,015)^{40}$ karena terdapat 40 kali pembayaran bunga dalam 20 tahun.

Selanjutnya, total saldo di akhir tahun ke-n adalah $5.000.000\ (1+0,015)^{2n}$.

Alternatif Penyelesaian
Contoh 2.13

Karena bunga dibayarkan tiap 3 bulan, maka terdapat 4 kali pembayaran (periode) dalam satu tahun, sehingga total pinjaman di akhir tahun ke-2 adalah Rp6.000.000,00 $(1+\frac{8}{4}\%)^8$.

Minta siswa menuliskan kesimpulan yang didapatkan dari kegiatan pembelajaran ini. Kemudian minta beberapa siswa untuk mempresentasikan di depan kelas dan minta siswa lainnya untuk saling menanggapi sehingga didapatkan satu kesimpulan bersama.

Jika simpanan dengan bunga majemuk dibayarkan sebanyak k kali dalam setahun dengan bunga r per tahun dan modal awal P, maka dapatkah Anda menghitung besarnya saldo akhir tahun ke-n?

Untuk menjawab pertanyaan tersebut, jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut.

a. Berapakah bunga yang diterima pada tahun ke-n?
b. Berapakah saldo yang dimiliki pada tahun ke-n?

Tulislah kesimpulan yang Anda dapatkan dari kegiatan di atas di dalam kotak yang sudah disediakan. Kemudian, diskusikan dengan teman atau kelompok lainnya dengan santun mengenai kesimpulan yang sudah dibuat.

Jika P = modal awal, r = suku bunga majemuk per tahun, n = lama simpanan dalam tahun, k = banyak pembayaran bunga dalam 1 tahun (banyak periode dalam 1 tahun), maka

a. Total bunga yang diterima pada tahun ke-n merupakan selisih saldo pada akhir periode ke-(kn) dengan saldo pada akhir periode ke-(k(n-1)).
b. Saldo yang dimiliki pada akhir tahun ke-n adalah $P(1+\frac{r}{k})^{nk}$.

Sesudah Pelaksanaan Pembelajaran

- Ajak siswa melakukan refleksi terhadap kegiatan pembelajaran.
- Berikan soal tambahan sebagai latihan soal di rumah (bila perlu).
- Minta siswa untuk memberikan usulan mengenai perbaikan pembelajaran.

Latihan 2.1.3

1. Suatu modal sebesar Rp10.000.000,00 diinvestasikan selama 2 tahun dengan bunga sebesar 10%. Tentukan besar modal jika modal dibungakan majemuk
   a. tahunan b. setiap setengah tahun c. setiap 3 bulan
   d. setiap bulan e. setiap hari f. setiap jam
2. Suatu modal sebesar Rp1.000.000,00 diinvestasikan dengan bunga 8%. Tentukan besar modal di akhir tahun ketiga jika modal diinvestasikan dengan bunga majemuk
   a. tahunan, b. setiap tiga bulan, c. harian.
3. Suatu modal sebesar Rp5.000.000,00 dibungakan majemuk 4% pertahun. Tentukan besar modal setelah 14,5 tahun.
4. Pak Ali menabung Rp1.000.000,00 di suatu bank dengan bunga tunggal sebesar 4% per tahun. Pak Budi juga menabung Rp1.000.000,00 di bank yang sama dengan bunga majemuk 4% per tahun. Setelah 5 tahun, tabungan siapakah yang lebih banyak?
5. Setiap awal tahun Pak Amir menabung sebesar Rp1.000.000,00 di bank yang memberikan bunga majemuk sebesar 4% per tahun. Pada awal tahun keenam, Pak Budi juga menabung sebesar Rp1.000.0000,00 di bank yang sama dan besar bunga majemuk yang sama. Tentukan selisih tabungan Pak Amir dan Pak Budi di akhir tahun ke sepuluh.

Pengayaan

6. Pak Ali menabung Rp1.000.000,00 di suatu bank dengan dibungakan secara majemuk sebesar 4% setiap 6 bulan. Pada saat yang sama, Pak Budi juga menabung Rp1.000.000,00 di bank yang sama dan dibungakan secara majemuk setiap tahun. Tentukan besar bunga yang akan diberikan kepada Pak Budi sehingga tabungan mereka sama besar di akhir tahun ke 5.

Alternatif Penyelesaian

Latihan 2.13

1. a. Rp12.100.000,00
   b. Rp12.155.062,50
   c. Rp12.184.028,98
   d. Rp12.194.230,85
   e. Rp12.213.693,02
   f. Rp12.214.013,64
2. a. Rp1.259.712,00
   b. Rp1.268.241,79
   c. Rp1.271.215,72
3. Karena bunganya dibayarkan tiap akhir tahun, maka besar modal setelah 14,5 tahun akan sama dengan modal di akhir tahun ke-14, yaitu Rp8.658.382,24.
4. Saldo Pak Budi lebih banyak. Saldo Pak Ali : Rp1.200.000,00, saldo Pak Budi : Rp1.216.652,90.
5. Akhir tahun ke-10 merupakan akhir tahun ke-5 bagi Pak Budi. Selisihnya adalah Rp263.591,38.
6. Besar bunga yang didapatkan Pak Ali selama 5 tahun adalah Rp218.994,42, yaitu saldo akhir dikurangi saldo awal. Jika suku bunga untuk Pak Budi adalah r, maka didapatkan $1.000.000\,(1+r)^5 = 1218994{,}42$. Dengan demikian dapat ditentukan besar r, yaitu 5%.
7. p dapat ditentukan menggunakan persamaan $(1 + 0{,}04) = (1 + \frac{p\%}{4})^4$, yaitu $p = 4$.
8. Karena saldo akhir sama, maka kita dapatkan persamaan $A(1+0{,}1)^5 = B(1+0{,}1)^8$. Permasalahan ini dapat dimodelkan dengan sistem persamaan dua variabel berikut. $\begin{cases} A + B = 50000000 \\ A = 1{,}331B \end{cases}$

   Dengan menyelesaikan SPLDV di atas didapatkan (dengan pembulatan) A = Rp21.450.000,00 dan B = Rp28.550.000,00.

7. Suatu modal sebesar Rp1.000.000,00 dibungakan majemuk 4% setiap tahun. Suatu modal lain juga sebesar Rp1.000.000,00 dibungakan majemuk p% setiap 3 bulan. Tentukan nilai p supaya kedua modal tersebut sama di akhir tahun pertama.
8. Pak Ali mempunyai modal sebesar Rp50.000.000,00 . Modal tersebut dipisahkan menjadi 2 tabungan yaitu tabungan A dan tabungan B yang masing-masing dibungakan majemuk dengan bunga 10% per tahun. Tabungan A dan B masing-masing diinvestasikan selama 5 tahun dan 8 tahun. Ternyata hasil investasi tabungan A dan B sama besar. Tentukan besar masing-masing tabungan A dan B di awal investasi.

Proyek

Kegiatan

Sepasang suami istri melakukan pengamatan bahwa biaya pendidikan di universitas pada saat ini adalah Rp30.000.000,00 dan setiap tahun mengalami kenaikan sebesar 10% dari tahun sebelumnya. Suami istri tersebut ingin menabung setiap tahun selama 15 tahun mulai tahun ini untuk biaya pendidikan anak mereka kelak di universitas. Setiap tahun mereka ingin menabung sebesar M di bank dan memperoleh bunga majemuk tahunan sebesar r%. Tentukanlah nilai M dan r sehingga hasil tabungan suami istri tersebut melebihi biaya pendidikan 15 tahun kemudian. (Jawaban dapat lebih dari 1).

1. Jika suatu simpanan menjadi dua kali lipat dalam waktu 9 tahun, berapa lama lagi waktu yang dibutuhkan untuk menjadi empat kali lipat simpanan awal (dengan bunga majemuk yang sama)?
2. Tentukan manakah investasi yang lebih menguntungkan jika modal yang dipunyai sebesar Rp10.000.000,00.
   a. Bunga majemuk 8% dibayarkan tiap bulan.
   b. Bunga majemuk 8,1% dibayarkan setiap 3 bulan.
   c. Bunga majemuk 8,2% dibayarkan tiap semester.
   d. Bunga majemuk 8,3% dibayarkan tiap tahun.
3. Tentukan total saldo yang diterima setelah 2,5 tahun jika modalnya adalah Rp2.000.000,00 dengan bunga majekmuk 9% dibayarkan tiap bulan.
4. Misal diketahui simpanan awal sebesar Rp1.000.000,00 membutuhkan n tahun untuk menjadi Rp2.000.000,00 dengan bunga majemuk tertentu. Tentukan berapa lama lagi waktu yang diperlukan agar simpanannya bertambah lagi sebesar Rp1.000.000,00. Pilihlah dari ketiga pilihan jawaban berikut dan jelaskan alasannya.

   a. Kurang dari n tahun, b. lebih dari n tahun, c. tepat n tahun.
5. Wafa dan Jindan menabung masing-masing Rp2.000.000,00 di hari yang sama untuk jangka waktu 2 tahun. Jika Wafa mendapatkan bunga 1,1 kali bunga yang didapatkan Jindan, maka tentukan selisih total saldo yang didapatkan Wafa dan Jindan. Jelaskan jawaban Anda.
6. Tentukan total bunga yang harus dibayarkan jika meminjaman uang sebesar Rp3.000.000,00 dengan bunga majemuk 8% tiap semester selama 30 bulan?
7. Tentukan besar saldo tabungan sekarang jika empat tahun yang lalu modalnya adalah Rp2.000.000,00 dengan bunga 10% dibayarkan tiap semester.
8. Antok meminjam uang di bank sebesar Rp20.000.000,00 dengan jangka waktu 4,5 tahun. Jika 2,5 tahun pertama bunganya adalah 9% dibayarkan tiap semester sedangkan 2 tahun berikutnya bunganya menjadi 8% dibayarkan tiap 3 bulan, tentukan total pinjaman Antok yang harus dibayarkan.
9. Bu Sofyan menyimpan uang masing-masing Rp5.000.000,00 ke dalam 3 tabungan untuk cucu-cucunya. Mereka bisa mengambil uang tersebut setelah masing-masing berumur 17 tahun. Sekarang Amir berusia 12 tahun 7 bulan, Hana berusia 10 tahun 2 bulan, dan Rina berusia 8 tahun 5 bulan. Tentukan besar uang yang diterima masing-masing pada usia 17 tahun jika bunganya adalah 8% dibayarkan tiap bulan.
10. Untuk modal dan suku bunga majemuk yang sama per tahun, manakah yang akan dipilih seorang peminjam: bunga yang dibayarkan tiap tahun atau bunga yang dibayarkkan tiap bulan? Pilihan yang mana pula yang akan dipilih pemberi pinjaman? Jelaskan jawaban Anda.

1. Tepat 18 tahun lagi akan menjadi 4 kali lipat simpanan awal. Dari persamaan $2M = M(1+r)^9$ didapatkan $2 = (1+r)^9$, sehingga $4 = (1+r)^{19}$.
2. Yang paling menguntungkan adalah bunga majemuk 8,2% dibayarkan tiap semester.
3. Saldo dapat dicari menggunakan $2.000.000\left(1+\frac{0,09}{12}\right)^{30}$
4. Dari persamaan $2.000.000 = 1.000.000\ (1 + r)^n$ didapatkan $2 = (1 + r)^n$. Sehingga dapat diketahui bahwa dibutuhkan waktu n tahun lagi untuk bertambah sebesar Rp2.000.000,00 lagi. Akibatnya dibutuhkan kurang dari n tahun agar bertambah Rp1.000.000,00 lagi.
5. Jika bunga yang didapatkan Jindan adalah r, maka bunga yang didapatkan Wafa adalah $1,1r$. Selisih saldonya adalah $2.000.000\ (1 + 1,1r)^2 - 2.000.000\ (1 + r)^2$. Ingat bahwa $(1 + 1,1r)^2 = (1 + r)^2 + 0,2r + 0,21r^2$ sehingga selisih saldo dapat dinyatakan dalam r.
6. Total bunga merupakan selisih dari total pinjaman selama 30 bulan dengan pinjaman awal, yaitu $3.000.000\left(1+\frac{0,08}{2}\right)^{5} - 3.000.000$.
7. Kasus ini sama dengan mencari total saldo 4 tahun mendatang jika modalnya ditabung sekarang. Jadi total saldonya adalah $2.000.000\left(1+\frac{0,1}{2}\right)^{8}$.
8. Langkah awal adalah menghitung total pinjaman setelah 2,5 tahun, kemudian hasil ini sebagai modal untuk menghitung total pinjaman dua tahun berikutnya. Total pinjaman setelah 2,5 tahun adalah $2.000.000\left(1+\frac{0,09}{2}\right)^{5}$, sehingga total

   pinjaman 2 tahun berikutnya adalah $2.000.000\left(1+\frac{0,09}{2}\right)^{5}\left(1+\frac{0,08}{4}\right)^{8}$.
9. Untuk sampai usia 17 tahun, usia Amir kurang 53 bulan, Hana kurang 82 bulan, Rina kurang 103 bulan.

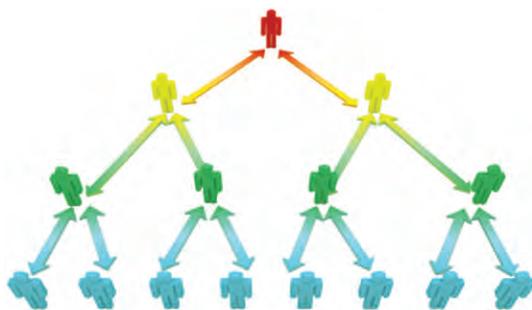
   Saldo Amir : $5.000.000\left(1+\frac{0,08}{12}\right)^{53}$, Saldo Hana : $5.000.000\left(1+\frac{0,08}{12}\right)^{82}$,

   Saldo Rina : $5.000.000\left(1+\frac{0,08}{12}\right)^{103}$
10. Ambil salah satu kasus dengan modal dan bunga tertentu yang sama, yang satu dengan bunga majemuk tiap tahun dan satu lainnya bunga majemuk tiap bulan. Untuk peminjam, pilih yang bunganya lebih kecil, sedangkan pemberi pinjaman akan memilih yang bunganya labih besar.

Subbab 2.2 Pertumbuhan dan Peluruhan

Kegiatan 2.2.1 Mengenal Pertumbuhan dan Peluruhan

Sistem Pemasaran

Pernahkah Anda mendengar sistem pemasaran dengan model *multilevel marketing*? Sistem pemasaran tersebut diilustrasikan pada skema pada Gambar 1.

Sumber: Perludiketahui.wordpress.com

Gambar 1. Sistem Pemasaran

Skema pada Gambar 1 menunjukkan bahwa setiap anggota harus merekrut dua anggota. Misalkan Anda berhasil merekrut dua anggota, maka kedua anggota tersebut berada pada tingkat 1. Selanjutnya jika kedua anggota pada tingkat 1 masing-masing berhasil merekrut dua anggota, maka keempat anggota dari tingkat 1 berada pada tingkat 2 dan anggota yang Anda memiliki sebanyak 6 orang. Selanjutnya, jika keempat anggota pada level 2 masing-masing merekrut 2 anggota, maka anggota pada tingkat 3 sebanyak 8 orang dan anggota Anda mencapai 14 orang. Tentunya Anda bisa menghitung banyak anggota yang Anda miliki jika tingkat Anda semakin tinggi.

Kegiatan Sebelum Pembelajaran

1. Siswa diberikan ilustrasi permasalah sehari-hari yang terkait masalah pertumbuhan, yaitu model pemasaran multilevel marketing.
2. Selanjutnya, diharapkan siswa dapat menentukan banyak anggota jika level semakin meningkat.
3. Berdasar hasil yang diperoleh siswa, guru dapat menggiring siswa untuk membuat dugaan awal mengenai ciri masalah pertumbuhan.

Contoh 2.14

Model serupa juga terjadi pada pertumbuhan organisme. Misalkan hasil pengamatan pada suatu laboratorium mengenai pertumbuhan bakteri diilustrasikan pada gambar 2.

Gambar 2. Pembelahan Bakteri *Sumber: Core-Plus Mathematics Course 1*

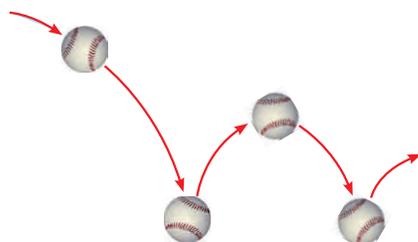
Berdasarkan Gambar 2. tampak bahwa satu bakteri dapat membelah menjadi dua bakteri dan untuk membelah diri dibutuhkan waktu 1 jam. Dengan kata lain dari satu bakteri setelah 1 jam akan diperoleh dua bakteri. Selanjutnya, jika setiap bakteri dapat membelah diri menjadi dua bakteri baru, maka setelah 2 jam akan diperoleh empat bakteri. Hitunglah banyak bakteri jika waktu terus bertambah. Buat dugaan kecenderungan banyak bakteri jika waktu terus bertambah. Dukung dugaan yang Anda buat dengan melengkapi tabel berikut.

Waktu (jam)	Banyak bakteri hasil membelah diri
1	$2 = 2^1$
2	$4 = 2^2$
3	$8 = 2^3$
4	
5	
⋮	
15	
24	
48	

Pada contoh 2.14, ajak siswa untuk melengkapi tabel banyak bakteri hasil membelah diri. Tanpa menentukan rumus umum, siswa dapat menentukan banyak bekteri hasil membelah diri setelah 15 jam, 24 jam, dan 48 jam. Selanjutnya, siswa diharapkan dapat mengidentifikasi bahwa nilai pada tabel semakin bertambah seiring bertambahnya waktu.

Apa yang dapat Anda simpulkan mengenai nilai yang diperoleh dari tabel di atas? Amati apakah banyak bakteri hasil membelah diri bertambah atau berkurang seiring bertambahnya waktu?

Contoh 2.15

Pernahkah Anda memantulkan bola pingpong? Jika Anda pantulkan maka bola itu akan memantul berulang-ulang sebelum berhenti. Ketinggian tiap-tiap pantulan akan lebih rendah daripada pantulan sebelumnya, seperti pada Gambar 3.

Gambar 3. Pantulan Bola *Sumber: Core-Plus Mathematics Course 1*

Andaikan sebuah bola pingpong dijatuhkan dari ketinggian 5 meter dan akan memantul kembali sejauh $\frac{4}{5}$ dari ketinggian sebelumnya. Tentukan ketinggian setelah pantulan ke-3, setelah pantulan ke-4, dan seterusnya. Buat dugaan kecenderungan tinggi pantulan yang dihasilkan. Dukung dugaan yang Anda buat dengan melengkapi tabel berikut.

Pantulan ke-	Tinggi bola yang dicapai (dalam meter)
1	$4 = \left(\frac{4}{5}\right)^1 (5)$
2	$\frac{16}{5} = \left(\frac{4}{5}\right)(4) = \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{4}{5}(5)\right) = \left(\frac{4}{5}\right)^2 (5)$

Pada Contoh 2.15, ajak siswa untuk melengkapi tabel tinggi bola yang dicapai. Tanpa menentukan rumus umum, siswa dapat menentukan tinggi bola yang dicapai pada pantulan ke 10, pantulan ke 15, dan pantulan ke 20. Selanjutnya, siswa diharapkan dapat mengidentifikasi bahwa nilai pada tabel semakin berkurang seiring bertambahnya pantulan.

3	$\frac{64}{25}=\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{16}{5}\right)=\left(\frac{4}{5}\right)\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{2}(5)\right)=\left(\frac{4}{5}\right)^{3}(5)$
4	
5	
⋮	
10	
15	
20	

Apa yang dapat Anda simpulkan mengenai nilai yang diperoleh dari tabel di atas? Coba Anda amati apakah tinggi pantulan bola bertambah atau berkurang seiring bertambahnya pantulan?

Berdasarkan kedua masalah di atas, masalah 1 mengenai pembelahan bakteri merupakan masalah pertumbuhan. Sedangkan masalah 2 mengenai benda jatuh merupakan masalah peluruhan.

Setelah Anda mengamati kedua masalah di atas, tentunya Anda ingin tahu tentang ciri dari masalah pertumbuhan dan peluruhan. Sekarang, coba Anda buat pertanyaan terkait ciri masalah pertumbuhan dan peluruhan. Upayakan pertanyaan yang Anda buat memuat kata-kata “bertambah”, “berkurang”, “barisan”, “pertumbuhan”, dan “peluruhan”. Tuliskan pertanyaan Anda pada tempat yang disediakan berikut.

Siswa diminta untuk membuat pertanyaan dari hasil mengamati terkait ciri masalah pertumbuhan dan peluruhan.

Dari pertanyaan yang Anda buat, mungkin ada diantaranya pertanyaan-pertanyaan berikut.

1. Apa ciri masalah pertumbuhan dan peluruhan?
2. Bagaimana cara menghitung nilai ke-n pada masalah pertumbuhan dan peluruhan?
3. Konsep barisan apa yang digunakan pada masalah pertumbuhan dan peluruhan?

Untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan tersebut Anda harus mengkaitkan bertambahnya nilai atau berkurangnya nilai dengan pertumbuhan atau peluruhan. Kaitkan pula pertambahan nilai atau pengurangan nilai tersebut dengan konsep barisan yang telah Anda pelajari. Apakah terkait dengan barisan aritmatika atau barisan geometri?

Ingat kembali pada Contoh 2.14 mengenai pembelahan bakteri yang merupakan pertumbuhan dan Contoh 2.15 mengenai pantulan bola yang merupakan peluruhan. Selanjutnya, amati kecenderungan nilai pada Contoh 2.14 dan 2.15 tersebut. Contoh mana yang nilainya bertambah dan contoh mana yang nilainya berkurang? Kaitkan bertambahnya nilai atau berkurangnya nilai dengan pertumbuhan atau peluruhan. Carilah beberapa contoh masalah yang terkait dengan pertumbuhan dan peluruhan dari buku referensi matematika atau dari internet guna menguatkan dugaan Anda. Contoh-contoh masalah itu dapat berupa soal UAN, soal ujian masuk perguruan tinggi, atau soal olimpiade.

Berikut diberikan beberapa masalah terkait pertumbuhan dan peluruhan.

Masalah Pertumbuhan

1. Hasil sensus penduduk pada tahun 2009 mencatat bahwa banyak penduduk suatu kota sebanyak 50.000 orang. Banyak penduduk ini meningkat dari tahun ke tahun. Peningkatan banyak penduduk dari tahun 2009 hingga tahun 2014 yang disajikan pada tabel berikut.

Ajak siswa untuk menggali informasi terkait ciri masalah pertumbuhan dan peluruhan. Informasi yang diinginkan untuk digali adalah siswa dapat mengkaitkan antara bertambahnya nilai atau berkurangnya nilai dengan pertumbuhan atau peluruhan.

Siswa diberikan beberapa contoh masalah pertumbuhan dan peluruhan. Tujuannya adalah siswa mampu mengidentifikasi ciri masalah pertumbuhan dan peluruhan. Selanjutnya, siswa diminta untuk menentukan apakah masalah yang diberikan merupakan masalah pertumbuhan atau masalah peluruhan, disertai penjelasannya.

Tahun	Banyak Penduduk (orang)
2009	50.000
2010	55.000
2011	60.500
2012	66.550
2013	73.205
2014	80.525

2. Pak Budi membeli sebidang tanah seluas 200 m^2 seharga Rp. 200.000.000 pada tahun 2010. Pada tahun 2015 Pak Budi ingin menjual tahan tersebut. Seiring berjalannya waktu harga tanah naik 25% setiap tahun. Harga tanah dari tahun 2010-2015 diberikan pada tabel berikut.

Tahun	Harga Tanah (Rp)
2010	200.000.000
2011	250.000.000
2012	312.500.000
2013	390.625.000
2014	488.281.250
2015	610.351.563

Masalah Peluruhan

3. Suatu bahan radioaktif yang semula berukuran 60 gram mengalami reaksi kimia sehingga ukurannya menyusut. Waktu penyusutan dan ukuran bahan radioktif dari waktu ke waktu disajikan pada tabel berikut.

Waktu (jam)	Ukuran Bahan Radioaktif (gram)
0	60
12	54
24	48,6
36	43,74
48	39,366
60	35,4394

4. Penisilin digunakan mengurangi penyebaran bakteri pada kasus infeksi. Pada suatu kasus infeksi seorang dokter memberikan dosis penisilin yang dapat membunuh 10% bakteri setiap 5 jam. Hasil diagnosa awal menunjukkan terdapat 500.000 bakteri yang menginfeksi seorang pasien. Hasil uji laboratorium mengenai penurunan penyebaran bakteri diberikan pada tabel berikut.

Waktu (jam)	Banyak Bakteri
0	500.000
5	450.000
10	405.000
15	364.500
20	328.050
25	295.245

Berdasarkan masalah yang diberikan, identifikasi ciri masalah yang merupakan perumbuhan dan masalah yang merupakan peluruhan. Dari ciri yang telah Anda identifikasi, tentukan masalah berikut merupakan masalah pertumbuhan atau masalah peluruhan, sertai pula penjelasannya.

Masalah Pertumbuhan dan Peluruhan

1. Suatu perusahaan pakan ternak dapat menghasilkan 400 kw pada awal produksi di tahun pertama. Selanjutnya perusahaan tersebut setiap tahun men targetkan kenaikan produksi 10% dari tahun sebelumnya.

Ayo Mengomunikasikan

Ajak siswa untuk membuat kesimpulan secara berkelompok mengenai ciri yang membedakan masalah pertumbuhan dan peluruhan dari hasil menalarnya. Minta siswa menukar kesimpulan antar kelompok. Kemudian, guru dapat meminta salah satu kelompok untuk menyajikan hasil diskusi di depan kelas. Guru menjadi pengarah saat diskusi kelas.

Sesudah Pelaksanaan Pembelajaran

1. Ajak siswa untuk melakukan refleksi belajar.
2. Minta siswa untuk membuat ringkasan dari kegiatan belajar.
3. Periksa kesesuaian ringkasan yang dibuat siswa dengan materi.
4. Berikan soal tambahan untuk dikerjakan siswa jika dirasa perlu.
5. Berikan penilaian terhadap hasil karya siswa menggunakan rubrik penilaian.
6. Mintalah siswa untuk memberikan usulan perbaikan pembelajaran.

2. Sebuah industri rumah tangga yang baru beroperasi tahun 2012 membeli mesin produksi seharga Rp100.000.000. Dengan berjalannya proses produksi, maka harga mesin menurun 1% setiap tahun.

Buatlah simpulan yang Anda dapatkan tentang ciri yang membedakan masalah pertumbuhan dan peluruhan. Diskusikan hasil yang Anda temukan dengan teman sekelompok, kemudian tukar dengan kelompok lain dan beri komentar terhadap hasil kelompok lain. Tuliskan hasil diskusi pada tempat yang disediakan berikut.

Kegiatan 2.2.2 Menentukan Rumus Pertumbuhan dan Peluruhan

Setelah Anda dapat mengidenfikasi ciri masalah pertumbuhan dan masalah peluruhan, Anda telah dapat menentukan bilamana suatu masalah merupakan masalah pertumbuhan dan bilamana merupakan masalah peluruhan. Selanjutnya, bagaimana Anda dapat menentukan nilai ke-*n* pada masalah pertumbuhan dan peluruhan?

Ingat kembali Contoh 2.14 tentang pembelahan bakteri, perhatikan tabel terkait banyak bakteri hasil membelah diri. Apakah Anda dapat menduga pola untuk menentukan banyak bakteri hasil membelah diri pada waktu ke-*n*? Jika Anda dapat menemukan pola ini maka Anda dapat menentukan banyak bakteri hasil pembelahan tanpa harus mendaftar banyak bakteri setiap satuan waktu. Bayangkan jika Anda harus mendaftar banyak bakteri setiap satuan waktu, tentunya hal ini tidak praktis terutama untuk satuan waktu yang besar. Demikian pula pada Contoh 2.15 mengenai pantulan bola, perhatikan tabel terkait tinggi bola yang dicapai. Tampak ada suatu pola yang terbentuk.

Kegiatan Sebelum Pembelajaran

1. Ingatkan siswa pada Contoh 2.14 mengenai pembelahan bakteri dan Contoh 2.15 mengenai pantulan bola.
2. Giring siswa untuk membuat dugaan awal mengenai rumus nilai ke n dari kedua masalah tersebut.

Dengan demikian Anda dapat menentukan tinggi bola yang dicapai setelah pantulan ke-n tanpa mendaftar tinggi bila yang dicapai sebelumnya.

Dalam hal ini, untuk mendapat nilai ke-n pada masalah pertumbuhan dan peluruhan akan terkait dengan nilai sebelumnya, yaitu nilai ke $n-1$. Pada sub bagian ini kita akan membahas rumus untuk menentukan nilai ke-n tersebut. Oleh karenanya, Anda perlu mengingat kembali konsep barisan yang telah Anda pelajari sebelumnya.

Banyak penduduk suatu kota setiap tahun meningkat sekitar 1% dari banyak penduduk tahun sebelumnya. Berdasarkan sensus penduduk pada tahun 2009, penduduk di kota tersebut berbanyak 100.000 orang. Hitung banyak penduduk pada tahun 2010 hingga tahun 2014 dengan melengkapi tabel berikut.

Tahun	Banyak Penduduk (orang)
2010	$100.000+\frac{1}{100}(100.000)=100.000\left(1+\frac{1}{100}\right)$ $=100.000(1,01)=101.000$
2011	$101.000+\frac{1}{100}(101.000)=101.000\left(1+\frac{1}{100}\right)$ $=101.000(1,01)=102.010$
2012	$102.010+\frac{1}{100}(102.010)=102.010\left(1+\frac{1}{100}\right)$ $=102.010(1,01)=103.030$
2013	
2014	

Pada Contoh 2.16, ajak siswa untuk melengkapi tabel banyak penduduk, disertai uraiannya. Selanjutnya, siswa diharapkan dapat menduga pola pertambahan banyak penduduk untuk tahun ke n.

Masalah di atas merupakan masalah ***pertumbuhan***. Beri alasan mengapa masalah tersebut merupakan masalah pertumbuhan. Amati pola yang terbentuk pada banyak penduduk selama lima tahun tersebut. Dugalah pola pertambahan banyak penduduk yang terjadi.

Contoh 2.17

Ketika sedang memeriksa seorang bayi yang menderita infeksi telinga, dokter mendiagnosis bahwa mungkin terdapat 1.000.000 bakteri yang menginfeksi. Selanjutnya pemberian penisilin yang diresepkan dokter dapat membunuh 5% bakteri setiap 4 jam. Coba Anda hitung banyak bakteri pada 24 jam pertama dengan melengkapi tabel berikut.

Waktu (jam)	Banyak Bakteri
4	$1.000.000 - \frac{5}{100}(1.000.000) = 1.000.000\left(1 - \frac{5}{100}\right)$ $= 1.000.000(0,95) = 950.000$
8	$950.000 - \frac{5}{100}(950.000) = 950.000\left(1 - \frac{5}{100}\right)$ $= 950.000(0,95) = 902.500$
12	$902.500 - \frac{5}{100}(902.500) = 902.500\left(1 - \frac{5}{100}\right)$ $= 902.500(0,95) = 857.375$
16	
20	
24	

Pada Contoh 2.17, ajak siswa untuk melengkapi tabel banyak bakteri, disertai uraiannya. Selanjutnya, siswa diharapkan dapat menduga pola pengurangan banyak bakteri setelah n jam.

Masalah di atas merupakan masalah ***peluruhan***. Beri alasan mengapa masalah tersebut merupakan masalah peluruhan. Amati pola yang terbentuk pada banyak bakteri pada 24 jam pertama tersebut. Dugalah pola pengurangan banyak bakteri yang terjadi.

Setelah Anda mengamati kedua masalah di atas, tentunya Anda ingin tahu pola umum tentang masalah pertumbuhan dan peluruhan. Sekarang, coba Anda buat pertanyaan terkait rumus nilai ke-n pada masalah pertumbuhan dan peluruhan! Upayakan pertanyaan yang Anda buat memuat kata-kata "pertumbuhan", "peluruhan", "rumus umum" dan "nilai ke-n". Tuliskan pertanyaan Anda pada tempat yang disediakan berikut.

Dari pertanyaan yang Anda buat, mungkin ada diantaranya pertanyaan-pertanyaan berikut.

1. Bagaimana menentukan rumus nilai ke-n pada masalah pertumbuhan?
2. Bagaimana menentukan rumus nilai ke-n pada masalah peluruhan?

Untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan tersebut, ingat kembali pada Contoh 2.16 mengenai banyak penduduk dan Contoh 2.17 mengenai banyak bakteri. Selanjutnya, pada Contoh 2.16, dugalah banyak penduduk pada tahun 2020! Untuk mendapat banyak penduduk pada tahun 2020, Anda harus menemukan pola pertambahan banyak penduduk. Demikian pula pada Contoh 2.17,

Siswa diminta untuk membuat pertanyaan dari hasil mengamati terkait rumus umum masalah pertumbuhan dan peluruhan.

Ayo Menggali Informasi

Ajak siswa untuk menggali informasi terkait rumus umum masalah pertumbuhan dan peluruhan. Informasi yang diinginkan untuk digali adalah siswa dapat menentukan rumus umum dari Contoh 2.16 menganai banyak penduduk dan Contoh 2.17 mengenai banyak bakteri.

dugalah banyak bakteri setelah 48 jam dan 72 jam. Untuk mendapat banyak bakteri setelah 48 jam dan 72 jam, Anda harus menemukan pola pengurangan banyak bakteri. Gunakan buku referensi matematika atau internet untuk mendukung dugaan sementara Anda.

Masalah Pertumbuhan

Untuk menguatkan dugaan yang Anda buat, mari kita cermati lebih rinci Contoh 2.16 mengenai banyak penduduk. Berdasarkan Contoh 2.16 dapat kita peroleh:

a. Banyak penduduk pada tahun 2010 adalah

$$100.000 + \frac{1}{100}(100.000)$$

$$= 100.000\left(1 + \frac{1}{100}\right)$$

$$= 100.000(1,01) = 101.000$$

Jadi, banyak penduduk pada tahun 2010 adalah 101.000 orang

b. Banyak penduduk pada tahun 2011 adalah

$$A_{2011} = A_{2010} + \frac{1}{100}A_{2010}$$

$$= 101.000 + \frac{1}{100}(101.000)$$

$$= 101.000\left(1 + \frac{1}{100}\right)$$

$$= 101.000(1,01) = 102.010$$

dengan A_{2010} menyatakan banyak penduduk pada tahun 2010 dan A_{2011} menyatakan banyak penduduk pada tahun 2011.

Guru menekankan bahwa Contoh 2.16 merupakan masalah pertumbuhan. Selanjutnya, siswa diarahkan untuk mendapatkan rumus umum dari Contoh 2.16 mengenai banyak penduduk secara rinci. Rumus ini didapatkan dengan mengkaitkan banyak penduduk pada tahun ke n dengan banyak penduduk pada tahun ke $n-1$.

Jika dirinci bentuk ini dapat dinyatakan dalam

$$A_{2011} = A_{2010} + \frac{1}{100}A_{2010}$$
$$= [100.000(1+0,01)] + (0,01)[100.000(1+0,01)]$$
$$= [100.000(1+0,01)](1+0,01)$$
$$= 100.000(1+0,01)^2 = 102.010$$

Jadi, banyak penduduk pada tahun 2011 adalah 102.010 orang.

c. Banyak penduduk pada tahun 2012 adalah

$$A_{2012} = A_{2011} + \frac{1}{100}A_{2011}$$
$$= 102.010 + \frac{1}{100}(102.010)$$
$$= 102.010\left(1+\frac{1}{100}\right)$$
$$= 102.000(1,01) = 103.030$$

dengan A_{2011} menyatakan banyak penduduk pada tahun 2011 dan A_{2012} menyatakan banyak penduduk pada tahun 2012.

Jika dirinci bentuk ini dapat dinyatakan dalam

$$A_{2012} = A_{2011} + \frac{1}{100}A_{2011}$$
$$= [100.000(1+0,01)^2] + (0,01)[100.000(1+0,01)^2]$$
$$= [100.000(1+0,01)^2](1+0,01)$$
$$= 100.000(1+0,01)^3 = 103.030$$

Jadi, banyak penduduk pada tahun 2012 adalah 103.030 orang.

Uraikan pula cara menghitung banyak penduduk pada tahun 2013 dan 2014. Selanjutnya, tuliskan rumus untuk menentukan banyak penduduk pada tahun ke-*n* setelah tahun 2009 pada tempat yang disediakan berikut. Lebih lanjut, setelah Anda menemukan rumus nilai ke-*n* untuk Contoh 2.16, tentunya Anda bisa menentukan banyak penduduk pada tahun 2020. Tuliskan pula banyak penduduk pada tahun 2020 tersebut.

Alternatif Penyelesaian

$A_n = 100.000(1 + 0,01)^n$ dengan A_n: banyak penduduk pada tahun ke *n* setelah tahun 2009.

Berikut diberikan masalah pertumbuhan lain yang serupa. Namun, pada bagian ini Anda diminta untuk mendapatkan rumus umum nilai ke-n yang mencerminkan rumus umum untuk masalah pertumbuhan.

Contoh 2.18

Suatu perusahaan pakan ternak dapat menghasilkan 400 kw pada awal produksi di tahun pertama. Selanjutnya perusahaan tersebut setiap tahun mentargetkan kenaikan produksi 10% dari tahun sebelumnya. Tentukan

a. Banyak produksi pada tahun ke-5.
b. Banyak produksi pada tahun ke-10.
c. Banyak produksi pada tahun ke-n.

Selanjutnya, buatlah rumus umum dari banyak produksi setelah tahun pertama dengan melengkapi tabel berikut. Disepakati sebelumnya bahwa A menyatakan banyak produksi pada tahun pertama dan r menyatakan persen pertambahan banyak produksi.

Siswa diminta menyelesaikan masalah pertumbuhan lain, yaitu mengenai banyak produksi yang disajikan pada Contoh 2.18. Siswa diharapkan dapat menentukan rumus umum untuk contoh 2.18. Selanjutnya, guru mengarahkan pada rumus umum mendapatkan nilai ke n untuk masalah pertumbuhan, yaitu

$A_n = A(1 + r)^n$ dengan A_n: nilai pada periode ke n, A: nilai awal, r: persentase pertambahan.

Tahun ke-	Banyak Produksi (kw)	Rumus Nilai ke-
1	400	-
2		
3		
4		
5		
⋮		
10		
15		
20		
⋮		
N		

Masalah Peluruhan

Demikian pula terkait masalah peluruhan, berikut rincian Contoh 2.2.4 mengenai banyak bakteri. Berdasarkan Contoh 2.2.4 dapat kita peroleh:

a. Banyak bakteri setelah 4 jam adalah

$$\begin{aligned}&1.000.000-\frac{5}{100}(1.000.000)\\&=1.000.000\left(1-\frac{5}{100}\right)\\&=1.000.000(0,95)=950.000\end{aligned}$$

Jadi, banyak banyak bakteri setelah 4 jam adalah 950.000 organisme.

Guru menekankan bahwa Contoh 2.17 merupakan masalah peluruhan. Selanjutnya, siswa diarahkan untuk mendapatkan rumus umum dari Contoh 2.17 mengenai banyak bakteri secara rinci. Rumus ini didapatkan dengan mengkaitkan banyak bakteri setelah n jam dengan banyak bakteri setelah $n–1$ jam.

b. Banyak bakteri setelah 8 jam adalah

$$A_8 = A_4 - \frac{5}{100} A_4$$
$$= 950.000 - \frac{5}{100}(950.000)$$
$$= 950.000\left(1 - \frac{5}{100}\right)$$
$$= 950.000(0,95) = 902.500$$

dengan A_4 menyatakan banyak bakteri setelah 4 jam dan A_8 menyatakan banyak bakteri setelah 8 jam.

Jika dirinci bentuk ini dapat dinyatakan dalam

$$A_8 = A_4 - \frac{5}{100} A_4$$
$$= [1.000.000(1 - 0,05)] - (0,05)[1.000.000(1 - 0,05)]$$
$$= [1.000.000(1 - 0,05)](1 - 0,05)$$
$$= 1.000.000(1 - 0,05)^2 = 902.500$$

Jadi, banyak banyak bakteri setelah 8 jam adalah 902.500 organisme.

c. Banyak bakteri setelah 12 jam adalah

$$A_{12} = A_8 - \frac{5}{100} A_8$$
$$= 902.500 - \frac{5}{100}(902.500)$$
$$= 902.500\left(1 - \frac{5}{100}\right)$$
$$= 902.500(0,95) = 857.375$$

dengan A_8 menyatakan banyak bakteri setelah 8 jam dan A_{12} menyatakan banyak bakteri setelah 12 jam.

Jika dirinci bentuk ini dapat dinyatakan dalam

$$A_{12} = A_8 - \frac{5}{100} A_8$$
$$= [1.000.000(1-0,05)^2] + (0,05)[1.000.000(1-0,05)^2]$$
$$= [1.000.000(1-0,05)^2](1-0,05)$$
$$= 1.000.000(1-0,05)^3 = 857.375$$

Jadi, banyak banyak bakteri setelah 12 jam adalah 957.375 organisme.

Uraikan pula cara menghitung banyak bakteri setelah 16 jam, 20 jam, dan 24 jam. Selanjutnya, tuliskan rumus untuk menentukan banyak bakteri setelah *n* jam pada tempat yang disediakan berikut. Lebih lanjut, setelah Anda menemukan rumus nilai ke-*n* untuk Contoh 2.18, tentunya Anda bisa menentukan banyak bakteri setelah 48 jam dan 72 jam. Tuliskan pula banyak bakteri setelah 48 jam dan 72 jam tersebut.

Berikut diberikan masalah peluruhan lain yang serupa. Namun, pada bagian ini Anda diminta untuk mendapatkan rumus umum nilai ke-*n* yang mencerminkan rumus umum untuk masalah peluruhan.

Alternatif Penyelesaian

$A_n = 1.000.000(1 - 0,05)^n$ dengan A_n: banyak bakteri setelah *n* jam, *n* kelipatan 4.

Contoh 2.19

Sebuah industri rumah tangga yang baru beroperasi tahun 2012 membeli mesin produksi seharga Rp100.000.000. Dengan berjalannya proses produksi, maka harga mesin menurun 1% setiap tahun. Tentukan

a. Harga mesin pada tahun ke-2014.
b. Harga mesin pada tahun ke-2020.
c. Harga mesin pada tahun ke-n.

Selanjutnya, buatlah rumus umum dari harga mesin setelah tahun 2012 dengan melengkapi tabel berikut. Kita sepakati bahwa A menyatakan harga mesin pada tahun 2012 dan r menyatakan persen penurunan harga mesin.

Tahun	Harga Mesin (Rp)	Rumus Nilai ke-
2012	100.000.000	-
2013		
2014		
2015		
2016		
⋮		
2020		
2025		
2030		
⋮		
n		

Siswa diminta menyelesaikan masalah peluruhan lain, yaitu mengenai harga mesin yang disajikan pada Contoh 2.19. Siswa diharapkan dapat menentukan rumus umum untuk Contoh 2.19. Selanjutnya, guru mengarahkan pada rumus umum mendapatkan nilai ke n untuk masalah peluruhan, yaitu

$A_n = A(1 - r)^n$ dengan A_n: nilai pada periode ke n, A: nilai awal, r: persentase peluruhan.

Buatlah simpulan Anda tentang rumus umum untuk mendapatkan nilai ke-n dari masalah pertumbuhan dan peluruhan. Diskusikan hasil yang Anda temukan dengan teman sekelompok, kemudian tukar dengan kelompok lain dan beri komentar terhadap hasil kelompok lain. Tuliskan hasil diskusi pada tempat yang disediakan berikut.

Ajak siswa untuk membuat kesimpulan secara berkelompok mengenai rumus umum masalah pertumbuhan dan peluruhan dari hasil menalarnya. Minta siswa menukar kesimpulan antar kelompok. Kemudian, guru dapat meminta salah satu kelompok untuk menyajikan hasil diskusi di depan kelas. Guru menjadi pengarah saat diskusi kelas.

Sesudah Pelaksanaan Pembelajaran

1. Ajak siswa untuk melakukan refleksi belajar.
2. Minta siswa untuk membuat ringkasan dari kegiatan belajar.
3. Periksa kesesuaian ringkasan yang dibuat siswa dengan materi.
4. Berikan soal tambahan untuk dikerjakan siswa jika dirasa perlu.
5. Berikan penilaian terhadap hasil karya siswa menggunakan rubrik penilaian.
6. Mintalah siswa untuk memberikan usulan perbaikan pembelajaran.

Alternatif Penyelesaian

Latihan 2.2

1. a. pertumbuhan
   b. $1.000(2^5)$
   c. $1.000(2^{10})$
   d. $1.000\left(2^{\frac{n}{2}}\right)$

2. a. pertumbuhan
   b. $200.000(1 + 0,1)^5$
   c. $200.000(1 + 0,1)^{n-2010}$
   d. $200.000(1 + 0,1)^{10}$

3. a. peluruhan
   b. setelah 24 jam
   $800.000(1 - 0,1)^4$
   Setelah 72 jam
   $800.000(1 - 0,1)^{12}$
   c. $800.000\,(1 - 0,1)^{\frac{n}{4}}$

4. a. pertumbuhan
   b. $300.000(1 + 0,3)^6$
   c. $300.000(1 + 0,3)^{n-2014}$

5. a. Perhatikan bahwa setelah 48 jam pertama terjadi penurunan sebanyak 8 gram, sedangkan setelah 48 jam kedua terjadi penurunan 7,2 gram. Jadi terdapat penurunan sebanyak 10% tiap 48 jam.
   b. Ukuran radioaktif pada 5×48 jam adalah $80(1 - 0,1)^5$.

Latihan 2.2

1. Kultur jaringan pada suatu uji laboratorium menujukkan bahwa satu bakteri dapat membelah diri dalam waktu 2 jam. Diketahui bahwa pada awal kultur jaringan tersebut terdapat 1.000 bakteri.
   a. Apakah masalah ini termasuk masalah pertumbuhan atau peluruhan?
   b. Tentukan banyak bakteri setelah 10 jam.
   c. Tentukan banyak bakteri setelah 20 jam.
   d. Tentukan banyak bakteri setelah n jam.
2. Berdasarkan hasil sensus pada tahun 2010, banyak penduduk di suatu kota berbanyak 200.000 orang. Banyak penduduk ini setiap tahun meningkat 10% dari banyak penduduk tahun sebelumnya.
   a. Apakah masalah ini termasuk masalah pertumbuhan atau peluruhan?
   b. Tentukan banyak penduduk pada tahun 2015.
   c. Tentukan banyak penduduk pada tahun ke-n.
   d. Prediksi banyak penduduk pada tahun 2020.
3. Pada pemeriksaan kedua dokter mendiagnosa bahwa masih ada 800.000 bakteri yang menginfeksi telinga seorang bayi. Untuk mempercepat proses penyembuhan, dokter meningkatkan dosis penisilin yang dapat membunuh 10% bakteri setiap 6 jam.
   a. Apakah masalah ini termasuk masalah pertumbuhan atau peluruhan?
   b. Tentukan banyak bakteri setelah 24 jam dan setelah 72 jam.
   c. Tentukan banyak bakteri setelah n jam.

4. Pada tahun 2014, Pak Abu membeli sebidang tanah seluas 300 m^2 seharga Rp300.000.000. Seiring berjalannya waktu harga tanah terus naik 30% setiap tahun.
   a. Apakah masalah ini termasuk masalah pertumbuhan atau peluruhan?
   b. Tentukan harga tanah pada tahun 2020.
   c. Tentukan harga tanah pada tahun ke-n.
5. Sebuah unsur radioaktif semula berukuran 80 gram. Setelah 48 jam, ukuran menjadi 72 gram. Demikian pula, 48 jam kedua menjadi 64,8 gram.
   a. Berapakah persen kenaikan setiap 48 jam?
   b. Berapa ukuran radioaktif setelah 5×48 jam?

Pengayaan

1. Suatu koloni bakteri pada awalnya ($t = 0$) memiliki 300 sel dan jumlahnya bertambah menjadi 3 kali lipat setiap 4 jam.
   a Berapakah jumlah bakteri setelah 16 jam?
   b. Berapakah jumlah bakteri setelah 24 jam?
   c. Tentukan rumus umum jumlah bakteri setelah t jam.
2. Suatu jenis bakteri diamati perkembangannya setiap jam. Ternyata banyaknya bakteri tiap jam bertambah dan membentuk barisan geometri. Tentukan syaratnya sehingga banyaknya bakteri pada jam kelima lebih banyak daripada banyaknya bakteri pada jam ketiga tetapi lebih sedikit daripada banyaknya bakteri pada jam ketujuh.

Petunjuk Pengayaan

1. Perkembangan jumlah bakteri setiap 4 jam adalah 300, 900, 2.700, 8.100, 24.300, 72.900, 218.700, …
   a. Banyaknya bakteri setelah 16 jam adalah 24.300.
   b. Banyaknya bakteri setelah 24 jam adalah 218.700.
   c. Banyaknya bakteri setelah t jam adalah $3^{\frac{t}{4}}\left(300\right)$.
2. Misalkan banyaknya bakteri semula = a.

   Maka banyaknya bakteri pada jam ketiga, jam kelima, dan jam ketujuh secara berturut- turut adalah ar^2, ar^4, dan ar^6. Diperoleh pertidaksamaan:

   $ar^2 < ar^4 < ar^6$.

   Karena $ar^2 > 0$, diperoleh $1 < r^2 < r^4$. Jadi, $r > 1$.

3. Suatu populasi bertambah menjadi 2 kali lipat setelah d satuan waktu. Jika banyaknya populasi pada saat ini $t = 0$ adalah p_0, maka buktikan bahwa banyaknya populasi setelah n kali d satuan waktu ádalah $2^n p_0$.

4. Di suatu desa ada seorang kaya yang tamak sehingga disebut Pak Tamak. Di desa tersebut juga ada seorang yang cerdik sehingga disebut Pak Cerdik. Pada suatu hari Pak Cerdik bertemu dengan Pak Tamak. Pak Cerdik memberikan tawaran kepada Pak Tamak sebagai berikut : "Pak Tamak, saya akan memberikan uang kepada Bapak sebesar Rp10.000.000,00 setiap hari selama 30 hari. Sebaliknya Pak Tamak memberikan uang kepada saya sebesar Rp1,00 pada hari pertama, Rp2,00 pada hari kedua, Rp4,00 pada hari ketiga, Rp8,00 pada hari keempat. Jadi banyaknya uang yang diberikan ke saya sebanyak dua kali lipat uang yang diberikan pada hari sebelumnya. Demikian seterusnya sampai hari ke tigapuluh. Apakah Bapak setuju?". Tanpa berpikir panjang pak Tamak menyetujui tawaran Pak Cerdik. Pikirnya,"Tidaklah sukar untuk memberikan uang sebesar Rp1,00, Rp2,00, Rp4,00 dan seterusnya. Saya akan mendapatkan banyak untung".

   Jelaskan siapakah yang menerima uang lebih banyak pada akhir hari ke tigapuluh?

3. Banyaknya populasi pada saat $t = 0$ adalah p_0.

   Setelah d satuan waktu pertama, banyaknya populasi ádalah $2p_0$.

   Setelah d satuan waktu kedua, banyaknya populasi ádalah $4p_0 = 2^2 p_0$.

   Setelah d satuan waktu ketiga, banyaknya populasi ádalah $8p_0 = 2^3 p_0$.

   Setelah d satuan waktu keempat, banyaknya populasi ádalah $16p_0 = 2^4 p_0$.

   Jadi, setelah d satuan waktu ke- n, banyaknya populasi ádalah $2^n p_0$.

4. Selama sebulan Pak Cerdik memberikan uang kepada Pak Tamak sebesar

   30 × Rp10.000.000,00 = Rp300.000.000,00

   Sedangkan selama sebulan Pak Tamak memberikan uang kepada Pak Cerdik sebesar Rp1,00 + Rp2,00 + Rp4,00 + Rp8,00 + … Perhatikan bahwa uang yang diberikan oleh Pak Tamak membentuk deret geometri dengan suku awal Rp1,00 dan rasio = 2. Dengan demikian pada hari ke 28, 29, dan 30, secara berturut-turut, Pak Tamak memberikan uang sebesar Rp134.217.728,00, Rp268.425.456,00 dan Rp536.870.912,00. Tentu saja uang yang dikeluarkan oleh Pak Tamak lebih banyak daripada uang yang diterimanya dari Pak Cerdik. Dengan demikian Pak Cerdik yang lebih beruntung.

Proyek

Proyek Kelompok : Tawar Menawar Mobil Bekas

Waktu : 5 hari

Materi : Deret Geometri

Anggota kelompok : 2 orang.

Kegiatan

1. Dibentuk 2 kelompok yang masing-masing terdiri atas 2 orang. Kelompok pertama selaku penjual mobil bekas dan kelompok kedua selaku pembeli.
2. Kelompok pertama menjual mobil bekas dengan harga Rp75.000.000,00. Sedangkan kelompok pembeli menawar dengan harga Rp40.000.000,00.
3. Kelompok pertama mengurangi

   Rp75.000.000,00 – Rp40.000.000,00 = Rp35.000.000,00. Kemudian membagi dua Rp35.000.000,00 : 2 = Rp17.500.000,00.

   Setelah itu kelompok pertama menawarkan mobil dengan harga

   Rp75.000.000,00 – Rp17.500.000,00 = Rp57.500.000,00.
4. Kelompok pembeli mengurangi

   Rp57.500.000,00 – Rp40.000.000,00 = Rp17.5000.000,00.

   Kemudian membagi dua Rp17.500.000,00 : 2 = Rp8.750.000,00.

   Setelah itu kelompok pembeli menawar mobil dengan harga

   Rp40.000.000,00 + Rp8.750.000,00 = Rp48.750.000,00.
5. Teruskan proses di atas sehingga tercapai harga kesepakatan sampai perseribuan terdekat.

6. Tentukan harga penawaran awal yang seharusnya ditawarkan oleh kelompok penjual sehingga harga kesepakatan adalah Rp 35.000.000,00 atau kurang. Temukan beberapa harga penawaran awal tersebut.
7. Harga penawaran mobil yang ditawarkan oleh kelompok penjual dapat diperoleh dengan mendefinisikan barisan secara rekursif sebagai berikut

   suku pertama = a_1 = 75.000.000,00

   suku berikutnya $a_n = a_{n-1} - \frac{d}{2^{2n-3}}$, dengan n = 2, 3, 4, ... dan d = selisih antara harga mobil awal dengan harga awal yang ditawarkan oleh kelompok pembeli.

   Gunakan barisan yang didefinisikan secara rekursif untuk menyelesaikan soal no 5 dan 6 di atas.
8. Empat suku pertama pada barisan di nomor 7 dapat dituliskan sebagai berikut :

   suku pertama = a_1, suku kedua = $a_2 = a_1 - \frac{d}{2}$,

   suku ketiga = $a_3 = a_2 - \frac{d}{2^3} = a_1 - \frac{d}{2} - \frac{d}{8}$,

   suku keempat = $a_4 = a_3 - \frac{d}{2^5} = a_1 - \frac{d}{2} - \frac{d}{8} - \frac{d}{32}$.

   Terapkan rumus penjumlahan deret geometri tak terhingga pada barisan rekursif di atas, untuk menemukan suatu rumus aljabar sederhana yang menyatakan harga jual mobil yang disepakati dengan mengikuti proses tawar menawar di atas. Notasikan harga jual yang disepakati dengan H.

   Periksa kebenaran dari rumus yang diperoleh dengan menggunakannya untuk menyelesaikan soal no 5 dan 6 di atas.

1. Sebuah mesin produksi baru dibeli seharga Rp500.000,00. Jika setiap tahun harga mesin tersebut menyusut sebesar 5%, tentukan harga jual mesin tersebut setelah 6 tahun.
2. Sebuah desa terpencil mempunyai penduduk sebanyak 90 orang. Setiap tahunnya terjadi pertumbuhan penduduk sebesar 10%. Tentukan jumlah penduduk desa tersebut dua tahun yang lalu. (dibulatkan ke bilangan bulat terdekat)
3. Pada tahun 2010 pengguna internet di kabupaten Malang mencapai 1.000.000 orang. Jumlah ini akan terus naik setiap tahunnya sebesar 22,5%. Berapakah kira-kira pengguna internet pada tahun 2015?
4. Sawah milik Pak Hasan diserang hama tikus kira-kira sebanyak 200 ekor. Pak Hasan memberikan pembasmi hama tikus setiap minggunya yang diyakini bisa mengurangi populasi tikus sebesar 30%. Hitunglah kira-kira jumlah tikus setelah 1 bulan.
5. Siti memelihara ayam petelur. Ayam-ayam miliknya tiba-tiba terserang penyakit sehingga ayam-ayam tersebut mati setiap minggunya sebanyak 10%. Setelah 1 bulan jumlah ayamnya menjadi 197 ekor. Tentukan jumlah ayam milik Siti mula-mula.
6. Suatu populasi ikan di sungai Brantas menurun menjadi setengahnya setiap 3 hari. Jika mula-mula diketahui terdapat 300.000 ikan di dalam sungai, maka hitunglah kira-kira jumlah ikan setelah 15 hari.

1. Harga jualnya menjadi $500.000\ (1 - 0{,}05)^6$ rupiah.
2. Misal jumlah penduduk 2 tahun lalu adalah P, maka kita dapatkan $P\ (1 + 0{,}1)^2$
3. Pengguna internet pada tahun 2015 adalah $1.000.000\ (1 - 0{,}05)^6$.
4. Jumlah tikus menjadi $200\ (1 - 0{,}3)^4$ ekor.
5. Jika jumlah ayam mula-mula adalah A, maka kita dapatkan $M(1 - 0{,}1)^4$. Sehingga $M = 300{,}26$. Jadi Siti memiliki ayam kira-kira sebanyak 300 ekor.
6. Jumlah ikan setelah 15 hari adalah $300.000\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 9.375$ ekor.

Induksi Matematika

Kompetensi Dasar Dan Pengalaman Belajar

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
1.1. Menghayati dan mengamalkan ajaran agama yang dianutnya 2.1. Menghayati perilaku disiplin, sikap kerjasama, sikap kritis dan cermat dalam bekerja menyelesaikan masalah kontekstual. 2.2. Memiliki dan menunjukkan rasa ingin tahu, motivasi internal, rasa senang dan tertarik dan percaya diri dalam melakukan kegiatan belajar ataupun memecahkan masalah nyata 3.5. Mendeskripsikan prinsip induksi matematis dan menerapkannya dalam membuktikan rumus jumlah deret persegi dan kubik. 4.5. Mengidentifikasi, menyajikan model matematika dan menyelesaikan masalah induksi matematis dalam membuktikan rumus jumlah deret persegi dan kubik.	Melalui pembelajaran Induksi matematis siswa memperoleh pengalaman belajar: 1. Mengamati dan menemukan pola induksi matematis 2. Memanipulasi bentuk aljabar untuk membuktikan suatu pernyataan 3. Menduga keberlakuan suatu pernyataan matematis 4. Membuktikan suatu pernyataan menggunakan induksi matematis 5. Menemukan kesalahan dalam pernyataan matematis

Biografi Al-Khawarizmi

Sumber: Kemdikbud

Beberapa cabang ilmu dalam Matematika yang diperkenalkan oleh al-Khawarizmi seperti: geometri, aljabar, aritmatika dan lain-lain. Geometri merupakan cabang kedua dalam matematika. Isi kandungan yang diperbincangkan dalam cabang kedua ini ialah asal-usul geometri dan rujukan utamanya ialah Kitab al-Ustugusat [The Elements] hasil karya Euclid : geometri dari segi bahasa berasal daripada perkataan yunani yaitu ‘geo’ yang berarti bumi dan ‘metri’ berarti pengukuran. Dari segi ilmu, geometri adalah ilmu yang mengkaji hal yang berhubungan dengan magnitud dan sifat-sifat ruang. Geometri ini dipelajari sejak zaman Firaun [2000-SM]. Kemudian Thales Miletus memperkenalkan geometri Mesir kepada Yunani sebagai satu sains dalam kurun abad ke 6 SM. Seterusnya sarjana Islam telah menyempurnakan kaidah pendidikan sains ini terutama pada abad ke 9M

Algebra/aljabar merupakan nadi matematika. Karya Al-Khawarizmi telah diterjemahkan oleh Gerhard of Gremano dan Robert of Chaster ke dalam bahasa Eropa pada abad ke-12. sebelum munculnya karya yang berjudul ‘Hisab al-Jibra wa al Muqabalah yang ditulis oleh al-Khawarizmi pada tahun 820M. Sebelum ini tak ada istilah aljabar.

Pribadi al-Khawarizmi

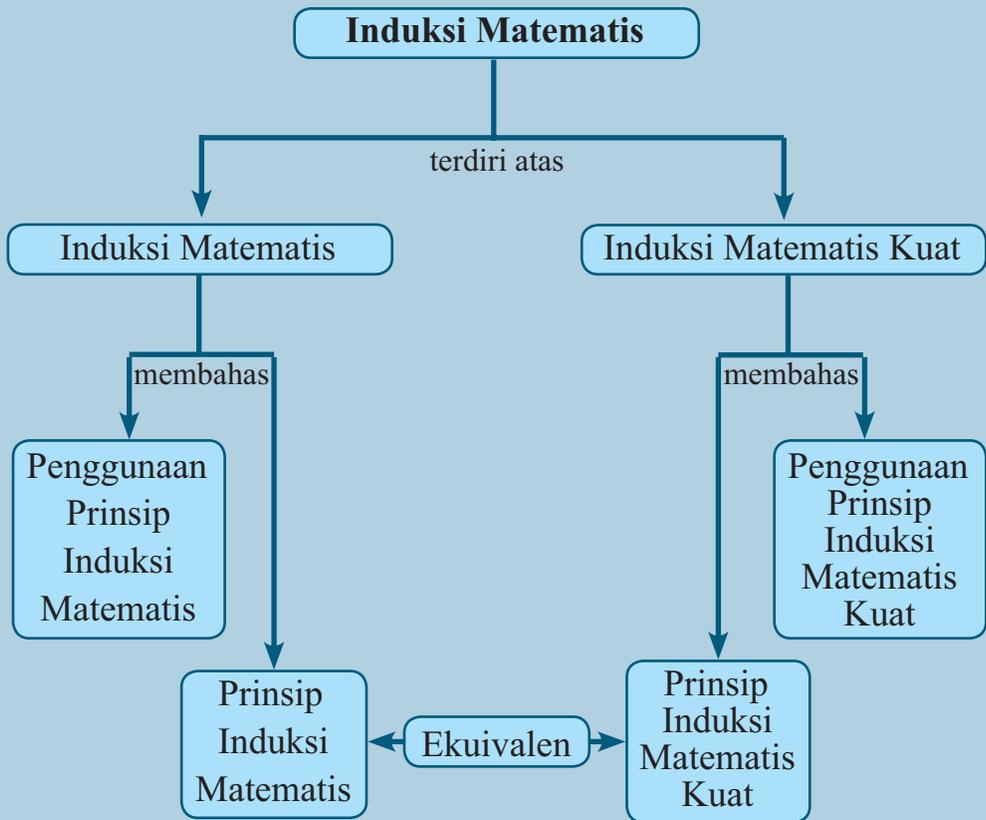
Kepribadian al-Khawarizmi telah diakui oleh orang Islam maupun dunia Barat. Ini dapat dibuktikan bahawa G.Sarton mengatakan bahwa“pencapaian-pencapaian yang tertinggi telah diperoleh oleh orang-orang Timur….” Dalam hal ini Al-Khawarizmi. Tokoh lain, Wiedmann berkata…." al-Khawarizmi mempunyai kepribadian yang teguh dan seorang yang mengabdikan hidupnya untuk dunia sains".

Sumber:http://bacabiografi.blogspot.com/2011/05/biografi-al-khawarizmi-ilmuan-muslim.html

Hikmah yang dapat dipetik:

Belajar ilmu merupakan kegiatan sepanjang hanyat.

Peta Konsep

Induksi Matematis
terdiri atas
Induksi Matematis
Induksi Matematis Kuat
membahas
membahas
Penggunaan Prinsip Induksi Matematis
Penggunaan Prinsip Induksi Matematis Kuat
Prinsip Induksi Matematis
Ekuivalen
Prinsip Induksi Matematis Kuat

Subbab 3.1 Induksi Matematis

Kegiatan 3.1.1 Penalaran Induktif Dan Deduktif

Penalaran induktif dan deduktif adalah dua cara mengambil kesimpulan. Jika penalaran deduktif berangkatnya dari sesuatu yang berlaku secara umum ke sesuatu yang khusus, penalaran induktif justru sebaliknya. Penalaran induktif diperoleh dari menyimpulkan kasus-kasus. Penalaran induktif biasanya digunakan untuk mengembangkan pengetahuan yang bersifat empiris, dan penalaran deduktif biasanya digunakan untuk mengembangkan pengetahuan yang bersifat abstrak. Namun demikian, dua cara ini perlu dimiliki siswa yang sedang belajar, termasuk belajar matematika. Dengan penalaran induktif, siswa akan sampai pada suatu pernyataan yang dikenal dengan istilah konjektur (dalam bahasa Inggris disebut *conjecture*) yang belum tentu benar secara mutlak. Dengan penalaran deduktif, kebenaran yang diperoleh merupakan kebenaran mutlak. Bagaimana dengan induksi matematis, apakah ini termasuk penalaran induktif atau deduktif? Mari kita perhatikan contoh-contoh berikut.

Contoh 3.1

Perhatikan pernyataan berikut.

Apapun bilangan asli yang kita substitusikan pada n dalam bentuk $n^2 - n + 41$, maka hasilnya pasti bilangan prima.

Mari kita substitusikan beberapa bilangan asli berturut-turut ke dalam tabel berikut.

Ayo Mengamati

Ajaklah siswa mengamati Contoh 3.1, Contoh 3.2, Contoh 3.3, dan Contoh 3.4. Mintalah siswa untuk mencatat hal-hal penting dalam masing-masing contoh. Khususnya terkait dengan penalaran induktif.

Contoh 3.1 dan Contoh 3.2 memberikan penekanan bahwa kesimpulan yang diperoleh secara induktif tidak dijamin kebenarannya.

n	Nilai $n^2 - n + 41$	Prima/Bukan Prima
1	41	Bilangan prima
2	43	Bilangan prima
3	47	Bilangan prima
4	53	Bilangan prima
5	61	Bilangan prima
6	71	Bilangan prima
7	83	Bilangan prima
8	97	Bilangan prima
9	113	Bilangan prima
10	131	Bilangan prima

Dari kolom ketiga di atas, tampak bahwa semua bilangan adalah bilangan prima. Kalau kita menggunakan kasus-kasus di atas untuk mengambil kesimpulan, maka kita dapat menyimpulkan bahwa $n^2 - n + 41$ adalah bilangan prima untuk apapun bilangan n-nya. Penalaran semacam ini kita sebut penalaran induktif.

Penalaran semacam ini sah-sah saja, dan ini yang sering terjadi dalam pengembangan ilmu-ilmu alam atau sosial. Kesimpulannya diperoleh dengan cara induktif.

Di dalam matematika, kebenaran suatu pernyataan itu harus bersifat absolut/ mutlak. Kalau dikatakan bahwa $n^2 - n + 41$ adalah bilangan prima untuk setiap bilangan asli n, maka pernyataan ini harus benar untuk bilangan asli apapun. Sayangnya, pernyataan bahwa $n^2 - n + 41$ adalah bilangan prima untuk setiap n bilangan asli adalah **tidak benar**.

Sebagai contoh, untuk $\boldsymbol{n} = \mathbf{41}$ maka nilai $\boldsymbol{n}^2 - \boldsymbol{n} + \mathbf{41}$ adalah bilangan yang habis dibagi 41. Karenanya, untuk $n = 41$, nilai $\boldsymbol{n}^2 - \boldsymbol{n} + \mathbf{41}$ adalah $41^2 - 41 + 41 = 41^2$ yang jelas bukan bilangan prima. Artinya, kesimpulan dari hasil penalaran induktif tidak selalu benar untuk semua nilai n. Oleh karenanya secara matematis tidak bisa diterima sebagai kebenaran mutlak.

Contoh 3.2

Jika p adalah bilangan prima, maka kita cenderung mengambil kesimpulan dari penalaran induktif bahwa $2^p - 1$ adalah bilangan prima juga. Mengapa demikian?

Coba kita substitusikan beberapa bilangan.

Jika $p = 2, 3, 5, 7$ maka $2p - 1$ akan bernilai 3, 7, 31, 127 yang semuanya adalah bilangan prima.

Tetapi, kalau kita substitusikan $p = 11$, maka hasilnya adalah 2047 yang bukan bilangan prima. Sebab 2.047 memiliki faktor lain selain 1 dan 2047 yaitu antara lain 23 dan 89. Periksalah bahwa $23 \times 89 = 2.047$.

Jadi, penalaran induktif yang umum seperti itu tidak menjamin diperolehnya pernyataan yang benar untuk setiap bilangan asli.

Contoh 3.3

Sekarang perhatikan pertidaksamaan $n < 2^n$. Apakah pertidaksamaan itu benar untuk semua bilangan asli n?

Mari kita periksa kebenaran pertidaksamaan tersebut dengan mensubstitusikan 10 bilangan asli yang pertama ke dalam tabel berikut.

n	$n < 2^n$	Benar/Salah
1	$1 < 2^2 = 2$	Benar
2	$2 < 2^2 = 4$	Benar
3	$3 < 2^3 = 8$	Benar

n	$n < 2^n$	Benar/Salah
4	$4 < 2^4 = 16$	Benar
5	$5 < 2^5 = 32$	Benar
6	$6 < 2^6 = 64$	Benar
8	$8 < 2^8 = 256$	Benar
9	$9 < 2^9 = 512$	Benar
10	$10 < 2^{10} = 1024$	Benar

Untuk 10 bilangan asli yang pertama tampak bahwa pertidaksamaan ini benar. Kenyataannya ini juga berlaku bahwa apapun bilangan asli n tertentu yang kita pilih, maka pertidaksamaan $n < 2^n$ ini juga akan benar.

Apakah dengan kegiatan penalaran induktif ini kita sudah membuktikan dan menyimpulkan bahwa pertidaksamaan $n < 2^n$ benar untuk semua bilangan asli n?

Contoh 3.4

Selidiki untuk bilangan asli n mana saja pertidaksamaan $3^n > n^3$ bernilai benar. Dengan mengunakan tabel berikut, kita akan mengecek kebenaran pertidaksamaan di atas untuk 8 bilangan asli yang pertama.

n	$3^n > n^3$	Benar/Salah
1	$3 = 3^1 > 1^3 = 1$	Salah
2	$9 = 3^2 > 2^3 = 8$	Salah
3	$27 = 3^3 > 3^3 = 27$	Salah
4	$81 = 3^4 > 4^3 = 64$	Benar
5	$243 = 3^5 > 5^3 = 125$	Benar
6	$729 = 3^6 > 6^3 = 216$	Benar
7	$2.187 = 3^7 > 7^3 = 343$	Benar
8	$6.561 = 3^8 > 8^3 = 512$	Benar

Contoh 3.3 dan Contoh 3.4 memberikan contoh penalaran secara induktif yang menghasilkan kesimpulan benar, akan tetapi perlu ditekankan bahwa penarikan kesimpulan secara induktif bukan merupakan bukti dari suatu kesimpulan yang diperoleh.

Kebalikan dari penalaran induktif adalah penalaran deduktif, di mana kesimpulan yang diperoleh dengan penaran deduktif bersifat mutlak, artinya selalu bernilai benar.

Siswa juga diajak untuk mengenali induksi matematis sebagai salah satu penalaran deduktif.

Dari tabel di atas, tampak bahwa untuk tiga bilangan asli pertama, pertidaksamaan bernilai salah. Pertidaksamaan baru bernilai benar setelah bilangan asli 4 ke atas.

Dengan kegiatan penalaran induktif, dapat disimpulkan bahwa pertidaksamaan $3^n > n^3$ benar untuk semua bilangan asli n yang lebih atau sama dengan 4.

Penarikan kesimpulan secara induktif yang umum ini tidak bisa diterima sebagai kebenaran mutlak di dalam matematika.

Lain halnya dengan **induksi matematis**. Prinsip induksi matematis merupakan teorema yang dapat dibuktikan kebenarannya (bukti teorema tersebut dapat kamu pelajari pada Buku Matematika di Perguruan Tinggi). Kebenaran yang diperoleh pada Prinsip Induksi Matematis merupakan kebenaran yang berlaku dalam semesta pembicaraannya. Dengan demikian, prinsip induksi matematis merupakan penalaran deduktif. Prinsip induksi matematis itulah yang akan kita pelajari sekarang.

Kalau Anda sudah membaca pendahuluan di atas, khususnya di bagian akhir, tentunya Anda pasti ingin tahu tentang apa induksi matematis itu. Mungkin Anda akan bertanya:

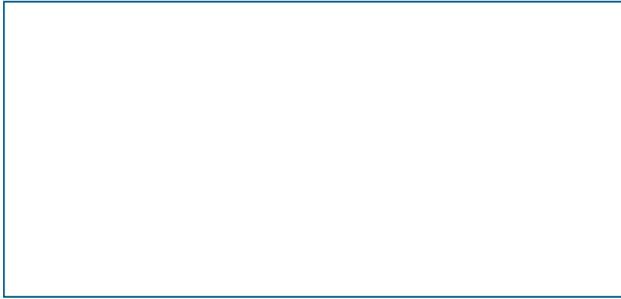
1. Apa sebenarnya induksi matematis itu?
2. Apa bedanya induksi matematis dengan penalaran induktif yang biasa kita kenal itu?
3. Untuk hal yang bagaimana induksi matematis itu digunakan?
4. Mengapa induksi matematis bisa diterima sebagai prinsip pembuktian yang valid dalam matematika (penalaran deduktif)?

Sekarang, tuliskan pertanyaan Anda pada tempat yang disediakan berikut. Buatlah pertanyaan yang berkenaan dengan apa yang Anda amati pada induksi matematis. Sila tuliskan pertanyaan Anda di kotak berikut atau di buku catatan Anda.

Ayo Menanya

Mintalah siswa untuk membuat pertanyaan dari hasil pengamatan melalui Contoh 3.1 sampai dengan Contoh 3.4 dikotak yang sudah disediakan.

Siswa diarahkan untuk membuat pertanyaan yang berkaitan dengan induksi matematis, misalnya:

1. Apa sebenarnya induksi matematis itu?
2. Apa bedanya induksi matematis dengan penalaran induktif yang biasa kita kenal itu?
3. Ada berapa macam prinsip induksi matematis?
4. Untuk hal yang bagaimana induksi matematis itu digunakan?
5. Mengapa induksi matematis bisa diterima sebagai prinsip pembuktian yang valid dalam matematika (penalaran deduktif)?

Ayo Menggali Informasi

Mudah-mudahan Anda semua mempertanyakan

1. Apa sebenarnya induksi matematis itu?
2. Mengapa induksi matematis merupakan suatu penalaran deduktif?
3. Bagaimana menggunakan induksi matematis dalam pembuktian suatu pernyataan?

Kalau Anda menanyakan ini, berarti Anda memang ingin memahami apa yang dimaksud dengan induksi matematis, mengapa induksi matematis merupakan suatu penalaran deduktif, dan bagaimana induksi matematis digunakan dalam pembuktian matematis.

Sekarang perhatikan tahap awal penalaran dalam Induksi Matematis.

Induksi Matematis: Tahap Awal

Perhatikan $P(n)$ suatu pernyataan yang berkenaan dengan semua bilangan asli n. Misalkan $P(n)$ memenuhi dua sifat:

1. $P(1)$ bernilai benar
2. Jika $P(k)$ bernilai benar, maka $P(k + 1)$ juga bernilai benar.

Ayo Menggali Informasi

Pandulah dan bantulah siswa dalam mencari informasi menjawab pertanyaan yang telah mereka buat. Khsusunya dalam menjawab apa itu induksi matematis dengan membaca Topik Cikal Bakal Induksi Matematis.

Pada pembahasan ini disebutkan $P(n)$ suatu pernyataan yang berkenaan semua bilangan asli n, yang memiliki sifat:

1. $P(1)$ bernilai benar
2. Untuk setiap bilangan asli k, apabila $P(k)$ bernilai benar, maka $P(k + 1)$ juga bernilai benar.

Dengan dua sifat ini, yang dilakukan secara berulang-ulang, khususnya pada sifat (2), maka akan diperoleh $P(n)$ yang benar untuk semua bilangan asli n.

Bantulah siswa dalam memahami, bahwa cara kerja induksi matematis secara intuisi sesungguhnya bekerja pada semua bilangan asli n.

Mari kita identifikasi nilai kebenaran $P(n)$ tersebut.

Berdasarkan pernyataan (1), maka $P(1)$ bernilai benar.

Pertanyaannya, apakah $P(2)$ juga bernilai benar?

Berdasarkan kenyataan bahwa $P(1)$ benar, maka dengan mengikuti sifat (2) yaitu untuk setiap bilangan asli k apabila $P(k)$ bernilai benar, maka $P(k + 1)$ juga bernilai benar, diperoleh $P(1 + 1) = P(2)$ bernilai benar.

Pertanyaan berikutnya, apakah $P(3)$ bernilai benar?

Dari proses sebelumnya kita sudah tahu bahwa $P(2)$ bernilai benar.

Berdasarkan sifat (2) lagi, maka $P(2 + 1) = P(3)$ juga bernilai benar.

Mungkin ada baiknya kita gunakan tabel untuk mengetahui lebih jauh tentang nilai kebenaran $P(n)$.

Diketahui	Dasar Pengambilan Kesimpulan	Kesimpulan
$P(1)$ benar	Sifat (2) (Untuk setiap bilangan asli k, apabila $P(k)$ benar, maka $P(k + 1)$ juga bernilai benar)	$P(1 + 1) = P(2)$ benar
$P(2)$ benar	Sifat (2)	$P(2 + 1) = P(3)$ benar
$P(3)$ benar	Sifat (2)	$P(3 + 1) = P(4)$ benar
$P(4)$ benar	Sifat (2)	$P(4 + 1) = P(5)$ benar
$P(5)$ benar	Sifat (2)	$P(5 + 1) = P(6)$ benar
$P(6)$ benar	Sifat (2)	$P(6 + 1) = P(7)$ benar
$P(7)$ benar	Sifat (2)	$P(7 + 1) = P(8)$ benar
$P(8)$ benar	Sifat (2)	$P(8 + 1) = P(9)$ benar
$P(9)$ benar	Sifat (2)	$P(9 + 1) = P(10)$ benar
$P(10)$ benar	Sifat (2)	$P(10 + 1) = P(11)$ benar

Apabila kita melakukannya terus menerus, maka dapat diperoleh bahwa $P(n)$ benar untuk semua n bilangan asli.

Dari informasi yang telah Anda peroleh di atas, sekarang apabila kita mempunyai suatu pernyataan $P(n)$ yang berkenaan dengan semua bilangan asli n, dan memenuhi dua sifat:

1. $P(1)$ benar
2. Untuk setiap bilangan asli k, apabila $P(k)$ benar maka $P(k + 1)$ juga benar.

Apa yang dapat disimpulkan dengan $P(n)$ tersebut?

Diskusikan pertanyaan tersebut dengan teman sebangkumu, kemudian tuliskan hasilnya dalam kotak berikut.

Setelah Anda berdiskusi bersama teman sebangkumu, sekarang dipersilakan melakukan diskusi kelas untuk membandingkan hasil pekerjaan diskusi kelompok Anda dan sekaligus untuk memperoleh jawaban tentang pernyataan $P(n)$ yang mempunyai dua sifat di atas. Mintalah bantuan guru Anda apabila menemui kesulitan atau terjadi ketidaksepahaman dengan teman Anda yang lain ketika diskusi kelas.

Setelah mendapatkan informasi cara kerja induksi matematis, mintalah siswa untuk berdiskusi dengan teman sebangkunya untuk mendiskusikan pertain yang diberikan. Siswa diminta menuliskan jawaban pada kotak yang disediakan.

Jawaban siswa yang diharapkan melalui bantuan guru adalah siswa dapat memperoleh kesimpulan bahwa pernyataan P(n) benar untuk semua bilangan asli n, apabila pernyataan P(n) yang berkenaan dengan semua bilangan asli n, dan memenuhi dua sifat:

a. P(1) benar
b. Untuk setiap bilangan asli k, apabila P(k) benar, maka P(k + 1) juga benar.

Mintalah salah satu kelompok untuk memamaparkan kesimpulan yang diperoleh dan siswa dari kelompok lain dipersilahkan untuk menanggapinya.

Bantulah siswa dalam diskusi kelas sehingga diperoleh kesimpulan yang seragam.

Perlu ditekankan pada siswa bahwa perolehan kesimpulan $P(n)$ untuk semua bilangan asli n

Bukan merupakan bukti formal untuk prinsip induksi matematis. Guru menginformasikan bahwa bukti formal untuk induksi matematis dapat diperoleh di buku perguruan tinggi.

Pada diskusi kelompok maupun diskusi kelas, guru melakukan pengamatan untuk melakukan penilaian sikap.

Tuliskan secara individu hasil diskusi kelas yang telah Anda peroleh dalam kotak berikut.

Diskusi

Catatan.

Pada proses perolehan kesimpulan $P(n)$ benar untuk semua bilangan asli n dengan cara di atas, bukan merupakan bukti formal secara matematis, melainkan hanya sekedar menyakinkan Anda secara intuisi bahwa dengan prinsip induksi matematis, pernyataan $P(n)$ yang mempunyai dua sifat di atas adalah benar untuk semua bilangan asli n Bukti formal induksi matematis dapat Anda pelajari dari buku matematika tingkat perguruan tinggi.

Dengan demikian prinsip induksi matematis merupakan suatu penalaran deduktif.

Kegiatan 3.1.2 Prinsip Induksi Matematis

Dari contoh-contoh yang telah didiskusikan pada subbab 3.1.1, khususnya pada Contoh 3.3 dan 3.4, kita telah menarik suatu kesimpulan secara induktif tentang kebenaran pernyataan tersebut. Pada Contoh 3.3, pernyataan matematika yang merupakan hasil dari penalaran induktif, berlaku untuk semua bilangan asli n. Sedangkan untuk Contoh 3.4, pernyataan tersebut berlaku pada himpunan bagian dari himpunan bilangan asli.

Setelah Anda mengetahui bahwa induksi matematis merupakan suatu penalaran deduktif, sekarang bagaimana sesungguh prinsip induksi matematis tersebut?

Perhatikan dengan cermat dan teliti contoh-contoh dan pembuktiannya di bawah ini.

Contoh 3.5

Jumlah n suku pertama bilangan asli $1 + 2 + 3 + ... + n$ adalah $\frac{1}{2}n(n + 1)$.

Contoh 3.6

Pada setiap segi n, jumlah semua sudut dalamnya adalah $(n – 2)180$ derajat.

Contoh 3.7

Banyak diagonal pada segi banyak konveks dengan n titik sudut adalah $\frac{1}{2}n(n–3)$.

Pembuktian kebenaran pernyataan pada Contoh 3.5.

Kebenaran pernyatan pada Contoh 3.5 berlaku untuk semua bilangan asli n. Anda dapat mengingat kembali materi tentang deret aritmetika, bahwa jumlah n suku pertama bilangan asli $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$ adalah benar

Pada contoh 3.5 kebenaran $P(n)$ berlaku untuk semua bilangan asli n.

Pada contoh 3.6 kebenaran $P(n)$ berlaku untuk semua bilangan asli $n \geq 3$.

Pada contoh 3.7 kebenaran $P(n)$ berlaku untuk semua bilangan asli $n \geq 4$.

Ajaklah siswa mengamati dan memahami bahwa pembuktian Contoh 3.5, 3.6, dan 3.7., dilakukan dengan cara sebagai berikut.

Pembuktian Contoh 3.5 dengan induksi matematis dilakukan dengan langkah pembuktian:

1. $P(1)$ benar
2. Untuk setiap bilangan asli k, jika $P(k)$ benar, maka $P(k + 1)$ benar.

Pembuktian Contoh 3.1.6 dengan induksi matematis dilakukan dengan langkah pembuktian:

1. $P(3)$ benar
2. Untuk setiap bilangan asli k, jika $P(k)$ benar, maka $P(k + 1)$ benar.

Pembuktian Contoh 3.1.7 dengan induksi matematis dilakukan dengan langkah pembuktian:

1. $P(4)$ benar
2. Untuk setiap bilangan asli k, jika $P(k)$ benar, maka $P(k + 1)$ benar.

untuk apapun bilangan asli n. Artinya, jika kesamaan $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2} n(n + 1)$ ini disebut $P(n)$, maka $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$, ... dan seterusnya adalah pernyataan-pernyataan yang bernilai benar.

Kalau dikaitkan dengan pola $P(n)$ di atas, maka pembuktian $P(n)$ benar untuk semua bilangan asli n, dapat dinyatakan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. $P(1)$ benar.
2. Untuk setiap bilangan asli k, jika $P(k)$ benar, maka $P(k + 1)$ benar.

Pembuktian Kebenaran pernyataan pada Contoh 3.6.

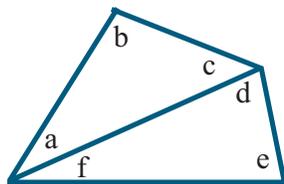
Kebenaran pernyataan pada Contoh 3.6 berlaku untuk semua bilangan asli n yang lebih besar atau sama dengan 3. Mengapa?

Dengan demikian, secara matematis, pernyataan Contoh 3.6 dapat dinyatakan sebagai berikut.

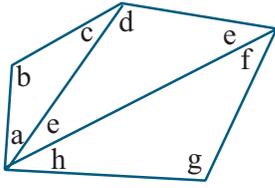
$P(n)$: Pada setiap segi-n, dengan $n \geq 3$, jumlah semua sudut dalamnya adalah $(n - 2)180°$.

Jumlah sudut dalam segitiga adalah 180° dan semua orang mungkin sudah mengenal hal itu. Bagaimana dengan jumlah sudut dalam segiempat, segilima dan seterusnya. Coba Anda amati ilustrasi berikut.

Jumlah sudut dalam segiempat.

Jumlah sudut dalam segiempat adalah 360° dan ini bisa ditunjukkan dengan ilustrasi sebagai berikut.

Jumlah sudut dalam segiempat ini adalah
$a + b + c + d + e + f = (a + b + c) + (d + e + f)$
$= 180 + 180 = 360$

Jumlah sudut dalam segilima

Jumlah sudut dalam segi lima adalah 540° dan ini bisa ditunjukkan dengan ilustrasi sebagai berikut.

Jumlahnya adalah $(a + b + c) + (d + e + i) + (f + g + h)$.
Karena masing-masing kelompok berjumlah 180°, maka total jumlah semua sudut dalamnya adalah
$3 \times 180°$

Kalau diteruskan, maka kita akan memperoleh pola $P(n)$ seperti pada tabel berikut.

Jenis Segi *n*	Jumlah sudut (derajat)	Pola (dalam derajat)
3	180	1·180
4	360	2·180 = (4 – 2)·180
5	540	3·180 = (5 – 2)·180
6	720	4·180 = (6 – 2)·180
7	900	5·180 = (7 – 2)·180
8	1.080	6·180 = (8 – 2)·180
9	1.260	7·180 = (9 – 2)·180
10	1.440	8·180 = (10 – 2)·180
11	1.620	9·180 = (11 – 2)·180
12	1.800	10·180 = (12 – 2)·180

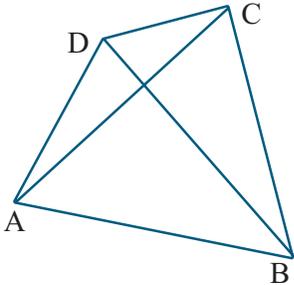
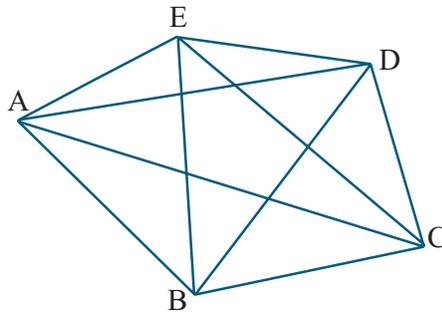
Dengan meneruskan pola di atas, maka kita peroleh $P(n)$ benar untuk semua $n \geq 3$.

Kalau dikaitkan dengan pola $P(n)$ di atas, maka pembuktian $P(n)$ benar untuk semua bilangan asli $n \geq 3$, dapat dinyatakan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. $P(3)$ benar
2. Untuk setiap bilangan asli $k \geq 3$, jika $P(k)$ benar, maka $P(k + 1)$ benar.

Pembuktian kebenaran pernyataan pada Contoh 3.7

Kebenaran dari pernyataan pada Contoh 3.7 ini berlaku hanya pada bilangan asli mulai dari 4. Mengapa?

Perhatikan ilustrasi berikut.

Diagonal dari segiempat *ABCD* ini ada 2, yaitu *AC* dan *BD*

Diagonal dari segilima *ABCDE* ini ada 5, yaitu *AD, AC, BD, BE*, dan *CE*

Kalau Anda meneruskan pembuatan ilustrasinya sampai segidelapan, maka Anda akan memperoleh pola seperti pada tabel sebagai berikut.

Jenis Segi-*n*	Banyak diagonalnya	Pola
4	2	$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot(4-3)$
5	5	$\frac{1}{2}\cdot 5\cdot(5-3)$
6	9	$\frac{1}{2}\cdot 6\cdot(6-3)$
7	14	$\frac{1}{2}\cdot 7\cdot(7-3)$
8	20	$\frac{1}{2}\cdot 8\cdot(8-3)$

Dengan meneruskan cara di atas, maka kita peroleh $P(n)$ benar untuk semua $n \geq 4$.

Kalau dikaitkan dengan pola $P(n)$ di atas, maka pembuktian $P(n)$ benar untuk semua bilangan asli $n \geq 4$, dapat dinyatakan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. $P(4)$ benar
2. Untuk setiap bilangan asli $k \geq 4$, jika $P(k)$ benar, maka $P(k + 1)$ benar.

Langkah-langkah pada pembuktian di atas merupakan contoh dari langkah-langkah pembuktian dengan prinsip induksi matematis.

Setelah Anda mengamati contoh-contoh dan pembuktiannya di atas, Anda pasti akan bertanya, bagaimana sebenarnya prinsip induksi matematis itu?

Buatlah pertanyaan-pertanyaan yang berkenaan dengan prinsip induksi matematis, kemudian tulislah pertanyaan itu dalam kotak berikut.

Mintalah siswa membuat pertanyaan-pertanyaatn yang berkaitan pembuktian pernyataan yang menggunakan prinsip induksi matematis. Mintalah siswa menuliskan pertanyaan pada kotak yang disediakan.

Salah satu pertanyaan yang diharapkan muncul dari siswa adalah bagaimana langkah-langkah pembuktian dalam induksi matematis.

Berdasarkan Contoh 3.5 beserta cara pembuktiannya, maka prinsip pembuktian dengan induksi matematis dinyatakan sebagai berikut:

Prinsip Induksi Matematis

Misalkan $P(n)$ adalah suatu pernyataan dimana kebenarannya ditentukan oleh nilai n. Jika $P(n)$ memenuhi dua sifat berikut.

1. *$P(n)$ itu benar untuk $n = 1$.*
2. *Untuk setiap bilangan asli k, jika $P(k)$ bernilai benar maka $P(k+1)$ juga bernilai benar,*

Maka $P(n)$ bernilai benar untuk setiap bilangan asli n,

Seperti yang Anda lihat dari Contoh 3.6 dan 3.7 serta pembuktiannya di atas, kebenaran pernyataan matematika tidak harus untuk semua bilangan asli n. Kadang kebenarannya hanya untuk bilangan asli mulai dari 3 ke atas, 4 ke atas, atau bahkan 10 ke atas. Beberapa contoh di atas telah menegaskan hal ini. Karena itu, di samping prinsip induksi matematis yang awal tadi, ada juga prinsip induksi matematis yang diperluas, yaitu:

Prinsip Induksi Matematis Yang Diperluas

Misalkan $P(n)$ adalah suatu pernyataan dimana kebenarannya ditentukan oleh nilai n. Jika $P(n)$ memenuhi dua sifat berikut.

1. *$P(n)$ itu benar untuk $n = m$.*
2. *Untuk setiap bilangan asli $k \geq m$, jika $P(k)$ bernilai benar maka $P(k+1)$ juga bernilai benar,*

Maka $P(n)$ bernilai benar untuk semua bilangan asli yang lebih atau sama dengan m.

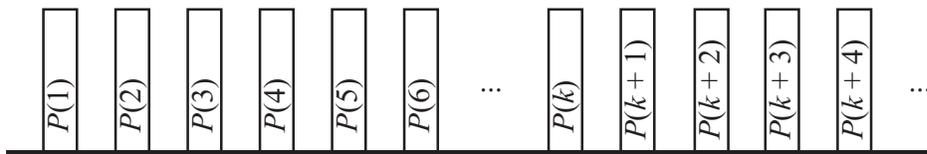
Kalau kita diibaratkan pernyataan $P(1)$, $P(2)$, ..., $P(n)$, ... sebagai kartu-kartu remi $P(1)$, $P(2)$, ..., $P(n)$, ... yang berjajar ke samping.

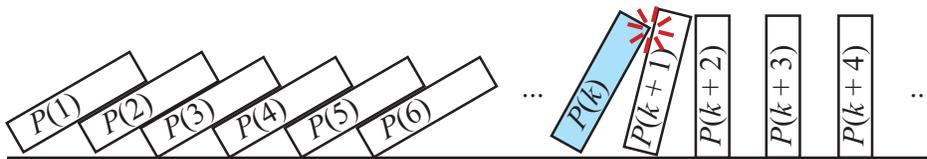
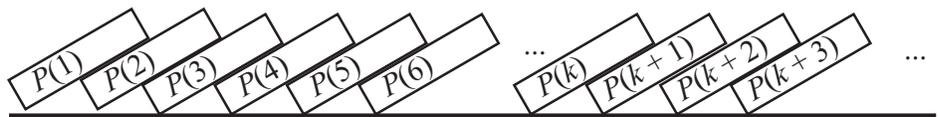
Sifat (1), pernyataan $P(1)$ benar, dapat diibaratkan sebagai kartu remi $P(1)$ jatuh.

Ajaklah siswa memahami prinsip induksi matematis, maupun prinsip induksi matematis yang diperluas berdasarkan contoh yang diberikan sebelumnya.

Untuk lebih memperjelaskan tentang prinsip induksi matematis, ajaklah siswa untuk mencermati ilustrasi prinsip induksi matematis melalui gambar kartu remi.

Sifat (2), untuk sebarang kartu remi $P(k)$ yang jatuh, dapat menjatuhkan kartu remi berikutnya $P(k + 1)$.

Karena kartu remi $P(1)$ jatuh, maka kartu remi $P(2)$ juga jatuh. Kemudian karena kartu remi $P(2)$ jatuh, maka kartu remi $P(3)$ juga jatuh. Selanjutnya kartu remi $P(4)$ jatuh, dan seterusnya. Akhirnya kesimpulan yang diperoleh semua kartu remi jatuh.

Pernyataan $P(1)$, $P(2)$, ..., $P(k)$, $P(k + 1)$, ...

Pernyataan $P(1)$ jatuh

Misalkan $P(k)$ jatuh akan menyebabkan $P(k + 1)$ juga jatuh

Semua pernyataan jatuh

Hasil Diskusi yang diharapkan

Langkah-langkah suatu bukti dengan menggunakan prinsip induksi matematis bahwa suatu pernyataan $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n adalah sebagai berikut:

1. Membuktikan bahwa $P(1)$ benar
2. Membuktikan bahwa untuk setiap bilangan asli k, apabila $P(k)$ benar, maka $P(k+1)$ juga benar.
3. Menyimpulkan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n.

Langkah-langkah suatu bukti dengan menggunakan prinsip induksi matematis yang diperluas bahwa suatu pernyataan $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq m$ adalah sebagai berikut:

1. Membuktikan bahwa $P(m)$ benar
2. Membuktikan bahwa untuk setiap bilangan asli $k \geq m$, apabila $P(k)$ benar, maka $P(k+1)$ juga benar.
3. Menyimpulkan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq m$.

Dari informasi yang telah Anda peroleh, sekarang Anda membentuk kelompok antara 3 – 4 orang untuk mendiskusikan pertanyaan-pertanyaan berikut.

1. Bagaimana langkah-langkah suatu bukti dengan menggunakan prinsip induksi matematis bahwa suatu pernyataan $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n?
2. Bagaimana langkah-langkah suatu bukti dengan menggunakan prinsip induksi matematis yang diperluas bahwa suatu pernyataan $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq m$, untuk suatu bilangan asli m?

Tuliskan hasil diskusi kelompok Anda dalam kotak berikut.

Langkah-langkah suatu bukti dengan menggunakan prinsip induksi matematis bahwa suatu pernyataan $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n adalah sebagai berikut:

Langkah-langkah suatu bukti dengan menggunakan prinsip induksi matematis diperluas bahwa suatu pernyataan $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq m$ untuk suatu bilangan asli m adalah sebagai berikut:

Mintalah siswa membuat kelompok 3-4 orang untuk mendiskusikan pertanyaan:

1. Bagaimana langkah-langkah suatu bukti dengan menggunakan prinsip induksi matematis bahwa suatu pernyataan $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n?
2. Bagaimana langkah-langkah suatu bukti dengan menggunakan prinsip induksi matematis yang diperluas bahwa suatu pernyataan $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq m$, untuk suatu bilangan asli m?

Bantulah siswa apabila mengalami kesulitan dalam diskusi kelompok.

Mintalah setiap kelompok menuliskan hasil diskusinya dalam kotak yang telah disediakan.

Setelah Anda melakukan diskusi kelompok dan menuliskan hasilnya, selanjutnya kelompok Anda saling berkunjung dengan kelompok lain untuk mendiskusikan hasil yang telah diperoleh. Tuliskan secara individu, hasil diskusi saling kunjung sebagai suatu kesimpulan yang telah diperoleh untuk menjawab dua pertanyaan di atas.

Kesimpulan
Langkah-langkah suatu bukti dengan menggunakan prinsip induksi matematis bahwa suatu pernyataan $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n adalah sebagai berikut:

Kesimpulan
Langkah-langkah suatu bukti dengan menggunakan prinsip induksi matematis yang diperluas bahwa suatu pernyataan $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq m$ untuk suatu bilangan asli m adalah sebagai berikut:

Ayo Mengomunikasikan

Setelah diskusi kelompok, mintalah antar kelompok untuk saling kunjung kepada kelompok lain dengan aturan tertentu. Misalnya apabila banyak kelompoknya genap, kelompok 1 ke kelompok 2, kelompok 3 ke kelompok 4, dan seterusnya. Apabila banyak kelompoknya ganjil sebagian anggota kelompok mengunjungi kelompok yang lain, kelompok 1 mengunjungi kelompok 2, kelompok 2 mengunji kelompok 3, dan seterusnya sampai kelompok retakhir mengunjungi kelompok 1.

Pada kegiatan diskusi ini, dan melakukan penilain sikap.

Kesimpulan yang diharapkan diperoleh dari kegiatan diskusi ini adalah sebagai berikut.

Kesimpulan

Langkah-langkah suatu bukti dengan menggunakan prinsip induksi matematis bahwa suatu pernyataan $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n adalah sebagai berikut:

1. Membuktikan bahwa $P(1)$ benar
2. Membuktikan bahwa untuk setiap bilangan asli k, apabila $P(k)$ benar, maka $P(k+1)$ juga benar.
3. Menyimpulkan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n.

Kesimpulan

Langkah-langkah suatu bukti dengan menggunakan prinsip induksi matematis yang diperluas bahwa suatu pernyataan $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq m$ adalah sebagai berikut:

1. Membuktikan bahwa $P(m)$ benar
2. Membuktikan bahwa untuk setiap bilangan asli $k \geq m$, apabila $P(k)$ benar, maka $P(k+1)$ juga benar.
3. Menyimpulkan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq m$.

Kegiatan 3.1.3 Penerapan Induksi Matematis

Prinsip induksi matematis banyak digunakan dalam pembuktian dalam matematika. Anda akan diberikan beberapa contoh penerapan prinsip induksi matematis. Silahkan Anda amati dengan seksama.

Contoh 3.8

Buktikan bahwa "untuk semua bilangan asli n, jumlah n bilangan ganjil berurutan pertama sama dengan n^2".

Bukti.

Misalkan pernyataan $P(n)$: jumlah n bilangan ganjil berurutan pertama sama dengan n^2.

1. *Langkah Dasar*

Pernyataan $P(n)$ ini benar untuk $n = 1$ sebab "jumlah" 1 bilangan ganjil yang pertama adalah 1 itu sendiri, dan 1 sama dengan 1^2.

Jadi, terbukti bahwa pernyataan $P(1)$ di atas adalah benar.

2. ***Langkah Induksi***

Untuk setiap bilangan asli k, misalkan $P(k)$ benar.

Artinya bahwa "jumlah k bilangan ganjil berurutan pertama adalah k^2"

Akan ditunjukkan terbukti benar juga bahwa $P(k + 1)$ jumlah $k + 1$ bilangan ganjil berurutan pertama adalah $(k + 1)^2$.

Dari pemisalan, bahwa $P(k)$ jumlah k bilangan ganjil berurutan pertama adalah k^2 adalah benar. Secara matematis, pernyataan $P(k)$ ini bisa dituliskan menjadi

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) = k^2$$

Ajaklah siswa mengamati langkah-langkah pembuktian dengan prinsip induksi matematis pada Contoh 3.8, 3.9, dan 3.10.

Contoh 3.8 dan 3.9 merupakan contoh penerapan induksi matematis, sedangkan Contoh 3.10 merupakan contoh penerapan induksi matematis yang diperluas.

Diharapkan siswa mengamati langkah induksi matematis yang terdiri dari:

1. Langkah Dasar

2. Langkah Induksi

3. Kesimpulan

Akan ditunjukkan bahwa $P(k + 1)$: jumlah $k + 1$ bilangan ganjil berurutan pertama adalah $(k + 1)^2$. yang secara matematis dituliskan menjadi

$$P(k+1):\ 1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = (k + 1)^2$$

Kita lihat ruas kiri dari persamaan terakhir ini, yaitu:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1)$$

Bentuk ini kalau diolah akan menghasilkan seperti berikut.

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = k^2 + (2(k + 1) - 1)$$

$$= k^2 + 2k + 2 - 1 = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$$

Jadi terbukti bahwa

$P(k + 1) : 1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = (k + 1)^2$ bernilai benar.

3. *Kesimpulan*

$P(n)$ jumlah n bilangan ganjil berurutan pertama sama dengan n^2 benar untuk setiap bilangan asli n.

Contoh 3.9

Tunjukkan bahwa "3 membagi $n(n + 1)(n + 2)$ untuk setiap bilangan asli n"?

Bukti.

Misalkan $P(n)$ 3 membagi $n(n + 1)(n + 2)$ untuk setiap bilangan asli n.

1. *Langkah Dasar*

Untuk $n = 1$, nilai $n(n + 1)(n + 2)$ adalah 6. Karenanya 3 membagi $n(n + 1)(n + 2)$ untuk $n = 1$. Jadi terbukti bahwa pernyataan $P(n)$ tersebut bernilai benar untuk $n = 1$.

2. *Langkah Induksi*

Untuk setiap bilangan asli k, misalkan pernyataan $P(k)$ itu bernilai benar. Artinya, kita anggap bahwa 3 membagi $k(k + 1)(k + 2)$.

Akan ditunjukkan bahwa $P(k + 1)$ bernilai benar, yaitu 3 membagi $(k + 1)((k + 1) + 1)((k + 1) + 2)$ atau 3 membagi $(k + 1)(k + 2)(k + 3)$.

Dengan sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan, maka bentuk $(k + 1)(k + 2)(k + 3)$ dapat diubah menjadi $[(k + 1)(k + 2)k] + [(k + 1)(k + 2)3]$ yang merupakan penjumlahan dari $k(k + 1)(k + 2)$ dan $3(k + 1)(k + 2)$.

Dari pemisalan, sudah diketahui bahwa 3 membagi $k(k + 1)(k + 2)$.

Karena 3 juga membagi $3(k + 1)(k + 2)$, maka 3 juga membagi $k(k + 1)(k + 2) + 3(k + 1)(k + 2)$.

Dengan demikian, $P(k + 1)$ 3 membagi $(k + 1)((k + 1) + 1)((k + 1) + 2)$ bernilai benar.

Jadi, jika 3 membagi $k(k + 1)(k + 2)$ maka 3 membagi $(k + 1)((k + 1) + 1)((k + 1) + 2)$.

3. *Kesimpulan*

$P(n)$: 3 membagi $n(n + 1)(n + 2)$ benar untuk setiap bilangan asli n.

Contoh 3.10

Buktikan bahwa pertidaksamaan $3^n > n^3$ berlaku untuk semua bilangan asli $n \geq 4$.

Bukti

Misalkan $P(n)$: $3^n > n^3$ untuk bilangan asli $n \geq 4$

1. ***Langkah Dasar***

Untuk $n = 4$, maka seperti pada penyelidikan Contoh 3.4, $P(4) : 81 = 3^4 > 4^3 = 64$ bernilai benar.

Jadi pertidaksamaan $P(n) : 3^n > n^3$ berlaku untuk $n = 4$.

2. ***Langkah Induksi***

Untuk setiap bilangan asli $k \geq 4$, misalkan pertidaksamaan $P(n) : 3^n > n^3$ bernilai benar. Ini berarti $3^k > n^k$ untuk $k \geq 4$.

Akan ditunjukkan bahwa pertidaksamaan $P(n) : 3^n > n^3$ juga berlaku untuk $n = k + 1$, yaitu

$P(k + 1) : 3^{k+1} > (k + 1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$.

Untuk menunjukkan ini, dengan menggunakan $3^k > k^3$ untuk $k \geq 4$, perhatikan bahwa $3^{k+1} = 3^k \cdot 3^1 = 3(3^k) \geq 3(k^3) = k^3 + 2k^3$ .... **(1)**

Karena $k \geq 4 > 3$, maka untuk

$2k^3 = k^3 + k^3 = k \cdot k^2 + k^2 \cdot k > 3 \cdot k^2 + 3^2 \cdot k = 3k^2 + 9k = 3k^2 + 3k + 6k > 3k^2 + 3k + 1$. **(2)**

Dengan memsubstitusikan persamaan **(2)** ke persamaan **(1)**, diperoleh

$3^{k+1} > k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = (k + 1)^3$

Ini berarti pertidaksamaan $P(n) : 3^n > n^3$ berlaku untuk $n = k + 1$.

3. ***Kesimpulan***

$P(n) : 3^n > n^3$ berlaku untuk semua bilangan asli $n \geq 4$.

Kalau Anda telah mengamati dengan sempurna, bayangkan ada orang lain yang Anda sayangi yang juga ingin tahu tentang penerapan prinsip induksi matematis ini dalam pembuktian. Tentu mereka akan ingin tahu dan akan menanyakan sesuatu kepada Anda. Kira-kira pertanyaan apa saja yang akan

Ayo Menanya

Pandu siswa membuat pertanyaan yang berkenaan dengan langkah-langkah pembuktian dalam penerapan induksi matematis dalam pembutian.

Harapan pertanyaan dari siswa adalah :

1. Bagaimanakah langkah-langkah pembuktian dalam induksi matematis?
2. Langkah mana yang merupakan hal penting merupakan kunci dalam bukti dengan induksi matematis?

mereka ajukan, dan tuliskan pertanyaan mereka itu pada tempat kosong berikut.

Guru Anda sebenarnya telah menyediakan beberapa contoh pernyataan dan bukti kebenaran dari pernyataan tersebut dengan induksi matematis. Mintalah contoh-contoh tersebut kepada guru Anda.

Anda juga dapat memperoleh contoh-contoh pengggunaan induksi matematiks di dalam buku-buku matematika tingkat lanjut, atau di internet. Cobalah kumpulkan contoh-contoh pembuktian itu, baik yang Anda peroleh dari guru Anda maupun yang dari internet, menjadi satu kumpulan contoh pembuktian dengan induksi matematis. Tata contoh-contoh tersebut sedemikian rupa mulai berdasarkan tingkat kesulitannya atau berdasarkan jenis materinya.

Bantulah siswa mengumpulkan informasi dengan memberikan soal dan buktinya, misalnya:

1. Buktikan untuk semua bilangan asli n berlaku, $1 + 4 + 7 + 10 + ... + (3n - 2) = \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$
2. Buktikan untuk semua bilangan asli n berlaku, $1 + 2 + 4 + 8 + ... + 2^n = 2^n - 1$
3. Buktikan bahwa 3 membagi $4^n - 1$untuk semua bilangan asli n.
4. Buktikan untuk sebarang bilangan bulat x, $x - 1$ membagi $x^n - 1$, untuk semua bilangan asli n.
5. Dengan menggunakan hukum distributif $a(b + c) = ab + ac$, buktikan bahwa untuk sebarang bilangan asli n, berlaku $a(b_1 + b_2 + ... + b_n) = ab_1 + ab_2 + ... + ab_n)$

Anda sudah memiliki kumpulan contoh pembuktian dengan induksi matematis. Coba Anda analisis pembuktian itu dengan menggunakan pisau analisis berikut:

1. Ada berapa langkah yang digunakan dalam pembuktian itu?
2. Apa yang istimewa dari langkah pertama kalau dibandingkan dengan apa yang diketahui dari soal atau pernyataan yang akan dibuktikan?
3. Apa yang istimewa dari langkah kedua dari pembuktian tersebut?

Tuliskan hasil analisis Anda ke dalam power point atau kertas manila dan siapkan diri untuk saling berbagi dengan teman Anda.

Coba saling pertukarkan power point atau kertas manila Anda dengan teman Anda. Cobalah meminta penjelasan kepada teman Anda tentang apa yang teman Anda tuliskan dan kritisi, tanyakan, atau berikan saran perbaikannya.

Kalau sudah, cobalah Anda membentuk kelompok 4 orang dan sepakatilah kesimpulan kelompok Anda. Sesudah itu, coba Anda tengok pekerjaan kelompok lain dan bandingkan dengan pekerjaan Anda.

Bantu siswa untuk menganalisis 3 pertanyaan dengan pisau analisis tersebut secara berkelompok 4 orang. Mintalah siswa menuliskan hasil diskusinya dalam bentuk power point atau di kertas.

Ayo Mengomunikasikan

Bantu siswa dalam menukarkan dan mengkritisi hasil kerja kelompoknya dengan kelompok lain. Bantulah siswa menyimpulkan hasil diskusinya.

Hasil diskusi yang diharapkan adalah sebagai berikut.

1. Terdapat 3 langkah yang digunakan dalam pembuktian itu, yaitu 1. Langkah Dasar, 2. Langkah Induksi, dan 3. Kesimpulan
   a. Langkah Pertama (Dasar), membuktikan bahwa $P(1)$ benar untuk induksi matematis atau $P(m)$ benar untuk induksi matematis yang diperluas.
   b. Langkah Kedua (Induksi)
      Untuk induksi matematis, membuktikan bahwa untuk setiap bilangan asli k, apabila $P(k)$ benar, maka $P(k+1)$ juga benar.
      Untuk induksi matematis yang diperluas, membuktikan bahwa untuk setiap bilangan asli $k \geq m$, apabila $P(k)$ benar, maka $P(k + 1)$ juga benar.
   c. Kesimpulan
      Untuk induksi matematis, menyimpulkan bahwa $P(n)$ benar untuk semua bilangan asli n
      Untuk induksi matematis yang diperluas, menyimpulkan bahwa $P(n)$ benar untuk semua bilangan asli $n \geq m$ untuk suatu bilangan asli m.

Alternatif Penyelesaian
Latihan 3.1

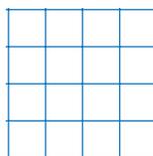
1. Generalisasi

a. Banyak persegi
   - Banyak persegi terbesar (4×4) =1
   - Banyak persegi (3×3) = 4
   - Banyak persegi (2×2) = 9
   - Banyak persegi (1×1) = 16

   Jadi banyak pesergi yang ditemukan = 1 + 4 + 9 + 16 = 30

b. Banyak persegi panjang
   - Banyak persegi panjang (4×4) =1
   - Banyak persegi panjang (4×3 atau 3×4) = 4
   - Banyak persegi panjang (4×2 atau 2×4) = 6
   - Banyak persegi panjang (4×1 atau 1×4) = 8
   - Banyak persegi panjang (3×3) = 4
   - Banyak persegi panjang (3×2 atau 2×3) = 12
   - Banyak persegi panjang (3×1 atau 1×3) = 16
   - Banyak persegi panjang (2×2) = 9
   - Banyak persegi panjang (2×1 atau 1×2) = 24
   - Banyak persegi panjang (1×1) = 16

   Jadi banyak persegi panjang = 1 + 4 + 6+ 8 + 4 + 12 + 16 + 9 + 24 + 16 = 70.

1. Membuat *generalisasi* dan menemukan formula.
   Perhatikan *grid* sebagai berikut, kemudian buatlah generalisasi untuk menentukan
   a. banyaknya persegi yang bisa ditemukan pada *grid*.
   b. Banyaknya persegipanjang yang bisa ditemukan pada *grid*.

2. Membuktikan dengan Induksi matematis.
   Buktikan bahwa pernyataan berikut bernilai benar.
   a. $2 + 4 + 6 + 8 + ... + 2n = n(n + 1)$, untuk setiap bilangan asli n.
   b. $1 + 2 + 4 + 8 + ... 2^{n-1} = 2^n - 1$, untuk setiap bilangan asli n.
   c. $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, untuk setiap bilangan asli n.
   d. $1^3+2^3+3^3+...+n^3=(1+2+3+...+n)^2$, untuk setiap bilangan asli n.
   e. $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+...+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ untuk setiap bilangan asli.
   f. $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$ untuk setiap bilangan asli.
   g. $n^3 + 5n$ adalah kelipatan 6 untuk setiap bilangan asli n.

2. Bukti hanya diberikan pada langkah induksi.

   a. ***Langkah Induksi***

   Untuk setiap bilangan asli k, misalkan $P(k)$ benar.

   Artinya $2 + 4 + 6 + 8 + ... + 2k = k(k + 1)$.

   Akan ditunjukkan $P(k + 1)$ benar. Perhatikan bahwa $2 + 4 + 6 + 8 + ... + 2k + 2(k + 1)$
   $= k(k + 1) + 2(k + 1) = (k + 1) + (k + 2)$.

   Jadi $P(k + 1)$ benar.

b. ***Langkah Induksi***

Untuk setiap bilangan asli k, misalkan $P(k)$ benar.

Artinya $1 + 2 + 4 + 8 + ... + 2^{k-1} = 2^k - 1$.

Akan ditunjukkan $P(k + 1)$ benar. Perhatikan bahwa $1 + 2 + 4 + 8 + ... + 2^{k-1} + 2^{(k+1)-1} = 2^k - 1 + 2^k = 2 \cdot 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$

Jadi $P(k + 1)$ benar.

c. ***Langkah Induksi***

Untuk setiap bilangan asli k, misalkan $P(k)$ benar.

Artinya $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

Akan ditunjukkan $P(k + 1)$ benar.

Perhatikan bahwa $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k + 1)^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k + 1)^2$

$$= \frac{k+1}{6}\left[(2k+1)+6(k+1)\right] - \frac{k+1}{6}\left[2k^2+7k+6\right] = \frac{k+1}{6}(k+2)(2k+3)$$

$$= \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}$$

Jadi $P(k + 1)$ benar.

d. ***Langkah Induksi***

Untuk setiap bilangan asli k, misalkan $P(k)$ benar.

Artinya $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3 = \left(\dfrac{k(k+1)}{2}\right)^2$.

Akan ditunjukkan $P(k + 1)$ benar.

Perhatikan bahwa $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3 + (k + 1)^3 = \left(\dfrac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k + 1)^3$

$$= \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 [k^2 + 4(k + 1)] = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 (k + 2)^2 = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$$

Jadi $P(k + 1)$ benar.

e. ***Langkah Induksi***

Untuk setiap bilangan asli k, misalkan $P(k)$ benar.

Artinya $1\cdot2 + 2\cdot2 + 3\cdot2 + ... + k(k + 1) = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{3}\right)$.

Akan ditunjukkan $P(k + 1)$ benar.

Perhatikan bahwa $1\cdot2 + 2\cdot2 + 3\cdot2 + ... + k(k + 1) + k(k + 1) + ((k + 1) + 1)$

$$=\left(\frac{k(k+1)(k+2)}{3}\right) + (k + 1)((k + 1) + 1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}[k + 3]$$

$$= \frac{(k+1)((k+1)+1)((k+1)+2)}{3}$$

Jadi $P(k + 1)$ benar.

f. ***Langkah Induksi***

Untuk setiap bilangan asli k, misalkan $P(k)$ benar.

Artinya $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+...+\frac{1}{k(k+1)}$.

Akan ditunjukkan $P(k + 1)$ benar.

Perhatikan bahwa $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+...+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)((k+1)+1)}$

$$=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)((k+1)+1)}=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)((k+1)+1)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)((k+1)+1)}$$

$$=\frac{(k+1)^2}{(k+1)((k+1)+1)}=\frac{k+1}{((k+1)+1)}$$

Jadi $P(k + 1)$ benar.

g. ***Langkah Induksi***

Untuk setiap bilangan asli k, misalkan $P(k)$ benar. Artinya $k^3 + 5k$ adalah kelipatan 6.

Akan ditunjukkan $P(k + 1)$ benar.

Perhatikan bahwa $(k + 1)^3 + 5(k + 1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 5k + 5$

$= k^3 + 5k + 3k^2 + 3k + 6 = k^3 + 5k + 3(k + 1)(k + 2)$

Karena $(k + 1)(k + 2)$ adalah dua bilangan asli yang berurutan, maka salah satu $(k + 1)$ atau $(k + 2)$ adalah bilangan genap. Sehingga $(k + 1)(k + 2)$ adalah bilangan genap atau kelipatan 2. Akibatnya $3(k + 1)(k + 2)$ adalah bilangan kelipatan 6. Karena $k^3 + 5k$ adalah kelipatan 6, maka $(k + 1)^3 + 5(k + 1) = k^3 + 5k + 3(k + 1)(k + 2)$ juga kelipatan 6.

Jadi $P(k + 1)$ benar.

h. ***Langkah Induksi***

Untuk setiap bilangan asli k, misalkan $P(k)$ benar.

Artinya $k^3 + (k + 1)^3 + (k + 2)^3$ habis dibagi 9.

Akan ditunjukkan $P(k + 1)$ benar. Perhatikan bahwa

$(k + 1)^3 + (k + 2)^3 + (k + 3)^3 = (k + 1)^3 + (k + 2)^3 + k^3 + 9k^2 + 27k + 27$

$= k^3 + (k + 1)^3 + (k + 2)^3 + 9(k^2 + 3k + 3)$.

Karena $k^3 + (k + 1)^3 + (k + 2)^3$ dan $9(k^2 + 3k + 3)$ masing-masing habis dibagi 9, maka $(k + 1)^3 + (k + 2)^3 + (k + 3)^3 = k^3 + (k + 1)^3 + (k + 2)^3 + 9(k^2 + 3k + 3)$ juga habis dibagi 9.

Jadi $P(k + 1)$ benar.

i. ***Langkah Induksi***

Untuk setiap bilangan asli k, misalkan $P(k)$ benar.

Artinya $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{k}$

Akan ditunjukkan $P(k+1)$ benar.

Perhatikan bahwa $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}\leq 2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}\leq 2-\frac{1}{k+1}$ Hal ini sama dengan menunjukkan bahwa $\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}\leq\frac{1}{k}$. Ini dibuktikan dengan ekivalensi berikut.

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}\leq\frac{1}{k} \quad\leftrightarrow\quad \frac{k+1}{(k+1)^2}+\frac{1}{(k+1)^2}\leq\frac{1}{k}$$

$$\leftrightarrow\quad \frac{k+2}{(k+1)^2}\leq\frac{1}{k}$$

$$\leftrightarrow\quad k(k+2)\leq(k+1)^2+k^2+2k+1$$

Jadi $P(k+1)$ benar.

j. ***Langkah Induksi***

Untuk setiap bilangan asli k, misalkan $P(k)$ benar.

Artinya, $\cos x\cos 2x\cos 4x\ldots\cos 2^{k\text{-}1}x = \frac{\sin 2^k x}{2^k\sin x}$.

Akan ditunjukkan $P(k+1)$ benar.

Sekarang $\cos x\cos 2x\cos 4x\ldots\cos 2^{k\text{-}1}x\cos 2^k x = \frac{\sin 2^k x}{2^k\sin x}\cos 2^k x$.

Dengan menggunaan kesamaan $\sin 2a = 2\sin a\cos a$ didapat

$$\frac{\sin 2^k x}{2^k\sin x}\cos 2^k x = \frac{\frac{1}{2}\sin 2\cdot 2^k x}{2^k\sin x}=\frac{\sin 2^{k+1}x}{2^k\sin x}.$$

Jadi $P(k+1)$ benar.

k. ***Langkah Induksi***

Untuk setiap bilangan asli k, misalkan $P(k)$ benar.

Artinya x_{3k} adalah bilangan-bilangan genap.

Akan ditunjukkan $P(k + 1)$ benar, yaitu $x_{3(k+1)}$.

Perhatikan bahwa $x_{3(k+1)} = x_{3k+3} = x_{3k+2} + x_{3k+1}$

$= x_{3k+1} + x_{3k} + x_{3k+1} = 2x_{3k+1} + x_{3k}$ adalah bilangan genap sebab $2x_{3k+1}$ dan x_{3k} keduanya genap.

Jadi $P(k + 1)$ benar.

l. ***Langkah Induksi***

Untuk setiap bilangan asli $k \geq 5$, misalkan $P(k)$ benar.

Artinya, $k^2 + 3 \leq 2^k$.

Akan ditunjukkan $P(k + 1)$ benar.

Perhatikan bahwa $(k + 1)^2 + 3 = k^2 + 2k + 1 + 3 \leq 2^k + 2k + 1$.

Karena $k \geq 5$, maka $2k + 1 \leq 2^k$.

Akibatnya $(k + 1)^2 + 3 \leq 2^k + 2k + 1 \leq 2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$.

Jadi $P(k + 1)$ benar.

m. ***Langkah Induksi***

Untuk setiap bilangan asli $k \geq 6$, misalkan $P(k)$ benar.

Artinya, $5k + 5 \leq k^2$.

Akan ditunjukkan $P(k + 1)$ benar.

Perhatikan bahwa $5(k + 1) + 5 = 5k + 10 \leq k^2 + 10$.

Karena $k \geq 6$, maka $10 \leq 2k + 1$.

Akibatnya $5(k + 1) + 5 \leq k^2 + 10 \leq k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$.

Jadi $P(k + 1)$ benar.

h. Jumlah pangkat 3 dari setiap tiga bilangan asli berurutan habis dibagi 9.

i. $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2} \leq 2-\frac{1}{n}$, untuk setiap bilangan asli n.

j. $\cos x \cos 2x \cos 4x ... \cos 2^{n-1} x = \frac{\sin 2^n x}{2^n \sin x}$, untuk setiap bilangan asli n.

k. Misalkan $x_0 = 0, x_1 = 1, x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ dengan n adalah bilangan asli.

Buktikan : x_{3n} merupakan bilangan genap, untuk semua bilangan asli n.

l. Buktikan bahwa $n^2 + 3 \leq 2^n$, untuk semua bilangan asli $n \geq 5$.

m. Buktikan bahwa $5n + 5 \leq n^2$, untuk semua bilangan asli $n \geq 6$.

3. Barisan Fibonacci adalah barisan yang berbentuk

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \ldots$$

Perhatikan bahwa dua suku pertama adalah 1 dan 1, dan sebarang suku selanjutnya adalah jumlah dua suku sebelumnya. Contohnya suku ketiga adalah 1 + 1 = 2, suku keempat adalah 1 + 2 = 3, dan seterusnya. Kita menyatakan suku ke-n dari barisan ini sebagai F_n. Jadi, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, dan $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Barisan Fibonacci perlu diperkenalkan disini karena barisan Fibonacci berkaitan erat dengan induksi matematis. Barisan ini memiliki struktur dan pola yang menarik. Perhatikan kondisi $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ atau ekuivalen dengan $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ yang merupakan langkah persiapan induksi yang sempurna. Kondisi tersebut mengarahkan kita bahwa kita dapat menentukan sesuatu tentang F_n dengan melihat suku-suku barisan yang sebelumnya. Karena itu dalam penggunaan induksi untuk membuktikan sesuatu tentang barisan Fibonacci, dapat diharapkan untuk menggunakan persamaan $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dalam langkah pembuktiannya.

Buktikan sifat-sifat barisan Fibonacci berikut:

a. $F_{n+1}^2 - F_{n+1}F_n - F_n^2 = (-1)^n$, untuk semua n bilangan asli.

b. $F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + ... + F_n = F_{n+2} - 1$, untuk semua n bilangan asli.

c. $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + ... + F_n^2 = F_n F_{n+1}$, untuk semua n bilangan asli..

d. $F_1 + F_3 + F_5 + F_7 + ... + F_{2n-1} = F_{2n}$, untuk semua n bilangan asli.

e. $F_2 + F_4 + F_6 + F_8 + ... + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$, untuk semua n bilangan asli.

4. Pada tahun ajaran baru ada 30 siswa kelas baru di kelas *X*. Untuk memperkenalkan diri setiap siswa saling bersalaman dengan siswa lainnya. Kita ingin mengetahui ada berapa banyak jabat tangan yang terjadi.

   a. Untuk mengetahui hal tersebut, isilah tabel di bawah ini

Banyak siswa	Banyak jabat tangan yang terjadi
2	
3	
4	
5	

   b. Apakah Anda sudah dapat menduga pola banyak jabat tangan yang terjadi? Tuliskan pola itu dan gunakan untuk mencari banyak jabat tangan yang terjadi jika ada 10 siswa, 30 siswa, dan n siswa.

   c. Buktikanlah pola yang diperoleh di bagian (ii) dengan menggunakan induksi matematis !

5. Tunjukkan apa yang salah pada "pembuktian" "teorema" berikut .

   a. "Teorema" : Untuk setiap bilangan bulat positif n, berlaku :

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{(n+1)^2}{2}$$

Alternatif Penyelesaian **Latihan 3.1**

3. Bukti hanya akan diberikan pada ***Langkah Induksi***

   a. ***Langkah Induksi***

   Untuk setiap bilangan asli k, misalkan $P(k)$ benar.

   Artinya, $F_1 + F_2 + F_3 + ... + F_{k+2} - 1$.

   Akan ditunjukkan $P(k + 1)$ benar,

   yaitu $F_1 + F_2 + F_3 + ... + F_k + F_{k+1} = F_{k+3} - 1$.

   Perhatikan bahwa $F_1 + F_2 + F_3 + ... + F_k + F_{k+1} = F_{k+2} - 1 + F_{k+1} = F_{k+3} - 1$.

   Jadi $P(k + 1)$ benar.

b. ***Langkah Induksi***

Untuk setiap bilangan asli k, misalkan $P(k)$ benar.

Artinya, $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + ...F_k^2 = F_k F_{k+1}$

Akan ditunjukkan $P(k + 1)$ benar,

yaitu $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + ...F_k^2 + F_{k+1}^2 = F_{k+1}F_{k+2}$.

Perhatikan bahwa $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + ...F_k^2 + F_{k+1}^2 = F_k F_{k+1} + F_{k+1}^2 = F_{k+1} F_{k+2}$

Jadi $P(k + 1)$ benar.

c. ***Langkah Induksi***

Untuk setiap bilangan asli k, misalkan $P(k)$ benar.

Artinya, $F_{k+1}^2 - F_{k+1} F_k - F_k^2 = (-1)^k$

Akan ditunjukkan $P(k + 1)$ benar,

yaitu $F_{k+2}^2 - F_{k+2}F_{k+1} - F_{k+1}^2 = (-1)^{k+1}$.

Dengan langsung menggunakan rumus $F_{n+1} = F_n + F_{n-1,}$ maka

$$\begin{aligned} F_{k+2}^2 - F_{k+2}F_{k+1} - F_{k+1}^2 &= (F_{k+1} F_k)^2 - (F_{k+1} F_k)^2 F_{k+1} - F_{k+1}^2 \\ &= F_{k+1}^2 + 2F_{k+1} F_k + F_k^2 - F_{k+1}^2 - F_{k+1} F_k - F_{k+1}^2 \\ &= F_{k+1} F_k + F_k^2 - F_{k+1}^2 \\ &= -(F_{k+1}^2 - (F_{k+1} F_k + F_k^2)) = -(-1)^k = (-1)^{k+1}. \end{aligned}$$

Jadi $P(k + 1)$ benar.

d. ***Langkah Induksi***

Untuk setiap bilangan asli k, misalkan $P(k)$ benar.

Artinya, $F_1 + F_3 + F_5 + ... + F_{2k-1} = F_{2k}$.

Akan ditunjukkan $P(k + 1)$ benar,

yaitu $F_1 + F_3 + F_5 + ... + F_{2n-1} + F_{2(k+1)-1} = F_{2(k+1)}$.

Perhatikan bahwa $F_1 + F_3 + F_5 + ... + F_{2n-1} + F_{2(k+1)-1} = F_{2k} + F_{2(k+1)-1}$

$= F_{2k} + F_{2k+1} = F_{2k+2} = F_{2(k+1)}$

Jadi $P(k + 1)$ benar.

e. ***Langkah Induksi***

Untuk setiap bilangan asli k, misalkan $P(k)$ benar.

Artinya, $F_2 + F_4 + F_6 + ... + F_{2k} = F_{2k+1} - 1$.

Akan ditunjukkan $P(k + 1)$ benar,

yaitu, $F_2 + F_4 + F_6 + ... + F_{2k} + F_{(2k+1)} = F_{2(k+1)+1} - 1$.

Perhatikan bahwa $F_2 + F_4 + F_6 + ... + F_{2k} + F_{(2k+1)} = F_{2k+1} - 1 + F_{2(k+1)}$

$= F_{2k+1} + F_{2k+2} - 1 = F_{2k+3} - 1 = F_{2(k+1)+1} - 1$.

Jadi $P(k + 1)$ benar.

4. a.

Banyak siswa	Banyak jabat tangan yang terjadi
2	1
3	3
4	6
5	10

b. Pola: n kombinasi 2 ditulis $nC2 = \dfrac{n!}{(n-2)!2!} = \dfrac{(n-1)n}{2}$

c. ***Langkah Induksi***

Untuk setiap bilangan asli $k \geq 2$, misalkan $P(k)$ benar. Artinya, banyak jabat tangan k siswa adalah $\dfrac{(k-1)k}{2}$. Akan ditunjukkan $P(k + 1)$ benar.

Misalkan terdapat $k + 1$ siswa. Maka untuk banyak jabat tangan k siswa adalah $\dfrac{(k-1)k}{2}$, sedangkan banyak jabat tangan 1 siswa adalah k. Jadi banyak jabat tangan $k + 1$ siswa adalah

$$\frac{(k-1)k}{2} + k = \frac{(k-1)k + 2k}{2} = \frac{(k-1+2)k}{2} = \frac{k(k+1)}{2}$$

Jadi $P(k + 1)$ benar.

"Bukti"

1) *Langkah Dasar* : rumus benar untuk $n = 1$.

2) *Langkah Induksi* : Asumsikan bahwa $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{(n+1)^2}{2}$

Dengan menggunakan hipotesis induksi, diperoleh

$$1 + 2 + 3 + ... + n + n + 1 = \frac{(n+1)^2}{2} + n + 1 = \frac{n^2 + n + \frac{1}{4}}{2} + n + 1$$

$$= \frac{n^2 + 3n + \frac{9}{4}}{2} = \frac{\left(n + \frac{3}{2}\right)^2}{2} = \frac{((n+1)+1)^2}{2}.$$

3) *Kesimpulan*

Jadi, rumus terbukti benar untuk setiap bilangan bulat positif n.

b. Tunjukkan apa yang salah pada "pembuktian" "teorema" berikut .

"Teorema" : Untuk setiap bilangan bulat positif n, jika x dan y adalah bilangan bulat positif dengan maksimum $(x, y) = n$, maka $x = y$.

"Bukti"

1) *Langkah Dasar*

Misalkan bahwa $n = 1$. Jika maksimum $(x, y) = 1$ dan x dan y ádalah bilangan bulat positif, maka $x = 1$ dan $y = 1$.

2). *Langkah Induksi*

Sekarang misalkan k adalah bilangan bulat positif. Asumsikan bahwa jika maksimum $(x, y) = k$, maka $x = y$. Misalkan maksimum $(x, y) = k + 1$ dengan x dan y adalah bilangan bulat positif. Maka maksimum $(x – 1, y – 1) = k$.

3) *Kesimpulan*

Jadi, dengan hipotesis induksi diperoleh $x – 1 = y – 1$. Diperoleh bahwa $x = y$.

Alternatif Penyelesaian Latihan 3.1

5. a. Langkah yang salah.

Langkah dasar : $1 \neq \frac{(1+1)^3}{2} = 2$

b. Langkah yang salah

Misalkan maksimum $(x, y) = k + 1$ dengan x dan y adalah bilangan bulat positif. Kemudian menyimpulkan maksimum $(x – 1, y – 1) = k$

Subbab 3.2 Prinsip Induksi Matematis Kuat

Kegiatan 3.2.1 Prinsip Induksi Matematis Kuat

Prinsip Induksi matematis yang disajikan di atas merupakan prinsip induksi matematis yang umum. Berikut akan disajikan suatu prinsip induksi yang lain, yang disebut dengan **prinsip induksi matematis kuat**.

Prinsip induksi matematis kuat ini perlu dikembangkan karena ternyata, dengan prinsip induksi matematis yang ada tersebut, terdapat beberapa pernyataan benar yang tidak bisa dibuktikan.

Contoh 3.11

Perhatikan barisan bilangan x_n yang didefinisikan dengan:

$x_1 = 1, x_2 = 2, x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n)$ untuk semua bilangan asli n. Akan ditunjukkan bahwa $1 \le x_n \le 2$ untuk semua bilangan asli n.

Dari definisi barisan tersebut, maka kita akan memperoleh barisan bilangan

$x_1 = 1$

$x_2 = 2$

$x_3 = \frac{1}{2}(x_2 + x_1) = 1,5$

$x_4 = \frac{1}{2}(x_3 + x_2) = 1,5\ \frac{1}{2}(1,5 + 2) = 1,75$

$x_5 = \frac{1}{2}(x_4 + x_3) = \frac{1}{2}(1,5 + 1,75) = 1,625$

dan seterusnya.

Ajaklah siswa mengamati prinsip induksi matematis kuat.

Harapan dari kegiatan mengamati ini adalah siswa dapat melihat perbedaan antara induksi matematis dan induksi matematis kuat, yaitu untuk induksi matematis kuat diperlukan pemisalan kebenaran $P(n)$ yang lebih kuat , yaitu $P(k)$ dan sebelumnya. Sedangkan untuk induksi matematis. Pemisalannya hanya $P(k)$ saja.

Kalau kita membuktikan dengan induksi matematis, maka untuk langkah dasar dengan mudah dilakukan, yaitu untuk $n = 1$, maka $1 \le x_1 = 1 \le 2$.

Jadi pernyataan $1 \le x_n \le 2$ benar untuk $n = 1$.

Yang menjadi masalah sekarang adalah bagaimana membuktikan pada langkah induksi, yaitu untuk setiap bilangan asli k, jika $1 \le x_n \le 2$ benar untuk $n = k$, apakah pernyataan itu juga benar untuk $n = k + 1$.

Mari kita amati penjelasan berikut.

Untuk setiap bilangan asli k, misalkan benar untuk $n = k$, yakni $1 \le x_n \le 2$.

Untuk menunjukkan bahwa $1 \le x_{k+1} \le 2$ atau $1 \le x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_{k-1} + x_k) \le 2$ kita tidak bisa hanya memanfaatkan fakta yang dimisalkan $1 \le x_k \le 2$ di atas.

x_k memang di antara 1 dan 2, tetapi apakah bisa dijamin bahwa x_{k-1} juga di antara 1 dan 2.

Agar terjamin bahwa $1 \le x_{k+1} \le 2$, maka di samping dimisalkan bahwa $1 \le x_k \le 2$, maka juga harus dimisalkan bahwa suku sebelumnya berlaku, yaitu $1 \le x_{k-1} \le 2$.

Inilah yang membedakan dengan Induksi matematis dan disebut dengan induksi matematis kuat.

Kalau Anda sudah membaca Contoh 3.11 di atas, tentunya Anda pasti ingin tahu tentang apa induksi kuat itu.

Sekarang, tuliskan pertanyaan Anda pada tempat yang disediakan berikut yang berkenaan dengan induksi kuat.

Mintalah siswa membuat pertanyaan yang berkenaan dengan induksi matematis kuat dan menuliskan dalam kotak yang disediakan. Pertanyaan yang diharapkan muncul misalnya

1. Apa induksi matematis kuat itu?.
2. Apa bedanya induksi matematis kuat dengan induksi matematis?
3. Apakah induksi matematis kuat ekuivalen dengan induksi matematis?

Mudah-mudahan Anda semua mempertanyakan

1. Apa induksi matematis kuat itu?
2. Apa bedanya induksi matematis kuat dengan induksi matematis?
3. Apakah induksi matematis kuat ekuivalen dengan induksi matematis?

Seperti dijelaskan pada contoh 3.11., induksi matematis tidak dapat digunakan dalam membuktikan masalah tersebut, karena pada induksi matematis langkah induksi, pemisalan yang dilakukan hanya pada kebenaran $P(k)$. Sedangkan dalam pembuktian tersebut tidak hanya cukup diperlukan kebenaran $P(k)$, melainkan juga diperlukan kebenaran $P(k - 1)$. Mungkin juga untuk masalah lain, dalam membuktikan kebenaran $P(k + 1)$ pada langkah induksi, kita memerlukan pemisalan kebenaran $P(n)$ untuk semua n mulai dari 1 sampai dengan k. Dengan kata lain dalam membuktikan kebenaran $P(k + 1)$, kita memerlukan asumsi kebenaran $P(1)$, $P(2)$, ..., sampai dengan $P(k)$. Prinsip inilah yang kita sebut dengan induksi matematis kuat, seperti diberikan berikut.

Prinsip Induksi Kuat

Misalkan $P(n)$ adalah suatu pernyataan dimana kebenarannya ditentukan oleh nilai n. Jika $P(n)$ memenuhi dua hal berikut, yaitu:

1. *$P(1)$ benar,*
2. *Untuk setiap bilangan asli k, jika $P(1)$, $P(2)$, ..., $P(k-1)$, $P(k)$ bernilai benar maka $P(k+1)$ juga bernilai benar*

Maka $P(n)$ bernilai benar untuk setiap bilangan asli .

Secara intuisi, kita dapat menggambarkan induksi matematis kuat ini sebagai berikut.

Dari sifat (1) kita mempunyai $P(1)$ benar.

Dengan $P(1)$ benar dan sifat (2): untuk setiap bilangan asli k, jika $P(1)$, $P(2)$, ..., $P(k - 1)$, $P(k)$ bernilai benar maka $P(k + 1)$ juga bernilai benar, maka diperoleh $P(2)$ benar.

Sehigga kita mempunyai $P(1)$ dan $P(2)$ benar.

Mintalah siswa untuk membaca informasi tentang prinsip induksi matematis kuat dan induksi matematis kuat yang diperluas. Selanjutnya juga diminta untuk membaca langkah-langkah dimana ditunjukkan secara induktif bahwa induksi matematis kuat ekuivalen dengan induksi matematis, yaitu diperoleh kesimpulan yang sama bahwa $P(n)$ benar untuk semua bilangan asli n.

Perlu ditekankan bahwa, langkah-langkah yang ditunjukkan untuk menyatakan bahwa induksi matematis kuat ekuivalen dengan induksi matematis bukanlah bukti formal secara matematis, melalinkan hanya ilustrasi. Untuk bukti formalnya dapat dipelajari dalam buku matematika perguruan tinggi.

Dengan menggunakan kembali sifat (2): untuk setiap bilangan asli k, jika $P(1)$, $P(2), ..., P(k - 1), P(k)$ bernilai benar maka $P(k + 1)$ juga bernilai benar, maka diperoleh $P(3)$ benar.

Dengan demikian kita mempunyai $P(1)$, $P(2)$, dan $P(3)$ benar.

Lebih lanjut kita gunakan tabel untuk melihat kesimpulan yang diperoleh.

Diketahui	Prinsip Induksi kuat	Kesimpulan
$P(1)$ benar	Sifat 2: $P(1), P(2), ..., P(k - 1), P(k)$ bernilai benar maka $P(k + 1)$ juga bernilai benar	$P(1)$ dan $P(2)$ benar
$P(1)$ dan $P(2)$ benar	Sifat 2	$P(1)$, $P(2)$, dan $P(3)$ benar
$P(1)$, $P(2)$, dan $P(3)$ benar	Sifat 2	$P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, dan $P(4)$ benar
$P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, dan $P(4)$ benar	Sifat 2	$P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$, dan $P(5)$ benar
$P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$, dan $P(5)$ benar	Sifat 2	$P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$, $P(5)$, dan $P(6)$ benar
$P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$, $P(5)$, dan $P(6)$ benar	Sifat 2	$P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$, $P(5)$, $P(6)$, dan $P(7)$ benar
$P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$, $P(5)$, $P(6)$, dan $P(7)$ benar	Sifat 2	$P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$, $P(5)$, $P(6)$, $P(7)$, dan $P(8)$ benar

Apabila kita melakukannya terus menerus, maka dapat diperoleh kesimpulan bahwa $P(n)$ benar untuk semua bilangan asli n.

Dengan intuisi di atas, dapat kita katakan bahwa induksi matematis kuat ekuivalen dengan induksi matematis.

Catatan:

Induksi matematis kuat ini dapat diperluas juga seperti pada induksi matematis, yaitu untuk n yang dimulai dari 1 dapat diperluas untuk n yang dimulai dari m suatu bilangan asli yang lebih dari 1.

Dengan memperhatikan prinsip induksi matematis yang diperluas, tuliskan prinsip induksi matematis kuat yang diperluas dalam tempat berikut.

Prinsip Induksi Matematis Kuat Yang Diperluas

Dari informasi yang telah Anda peroleh, sekarang Anda membentuk kelompok berpasangan dengan teman sebelah untuk mendiskusikan pertanyaan-pertanyaan berikut.

1. Bagaimana langkah-langkah suatu bukti dengan menggunakan prinsip induksi kuat bahwa suatu pernyataan $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n?
2. Bagaimana langkah-langkah suatu bukti dengan menggunakan prinsip induksi matematis kuat yang diperluas bahwa suatu pernyataan $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq m$, untuk suatu bilangan asli m?

Tuliskan hasil diskusi kelompok Anda dalam kotak berikut.

Langkah-langkah suatu bukti dengan menggunakan prinsip induksi matematis kuat bahwa suatu pernyataan $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n adalah sebagai berikut:

Mintalah siswa untuk berpasangan dengan teman sebelahnya untuk mendiskusi pertanyaan-pertanyaan:

1. Bagaimana langkah-langkah suatu bukti dengan menggunakan prinsip induksi matematis kuat bahwa suatu pernyataan $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n?
2. Bagaimana langkah-langkah suatu bukti dengan menggunakan prinsip induksi matematis kuat yang diperluas bahwa suatu pernyataan $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq m$, untuk suatu bilangan asli m?

Mintalah siswa untuk menuliskan jawabannya pada kotak yang disediakan.

Harapan jawaban dari pertanyaan tersebut adalah:

Langkah-langkah suatu bukti dengan menggunakan prinsip induksi matematis kuat bahwa suatu pernyataan $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n adalah sebagai berikut:

1. Membuktikan bahwa $P(1)$ benar
2. Membuktikan bahwa untuk setiap bilangan asli k, jika $P(1)$, $P(2)$, …, $P(k)$ benar, maka $P(k+1)$ juga benar.
3. Menyimpulkan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n.

Langkah-langkah suatu bukti dengan menggunakan prinsip induksi matematis kuat yang diperluas bahwa suatu pernyataan $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq m$ adalah sebagai berikut:

1. Membuktikan bahwa $P(m)$ benar
2. Membuktikan bahwa untuk setiap bilangan asli $n \geq m$, apabila $P(m)$, $P(m+1)$, …, $P(k)$ benar, maka $P(k+1)$ juga benar.
3. Menyimpulkan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n.

Langkah-langkah suatu bukti dengan menggunakan prinsip induksi matematis kuat yang diperluas bahwa suatu pernyataan $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq m$ untuk suatu bilangan asli m adalah sebagai berikut:

Setelah Anda melakukan diskusi kelompok dan menuliskan hasilnya, selanjutnya kelompok Anda saling berkunjung dengan kelompok lain untuk mendiskusikan hasil yang telah diperoleh. Tuliskan secara individu, hasil diskusi saling kunjung sebagai suatu kesimpulan yang telah diperoleh untuk menjawab dua pertanyaan di atas.

Kesimpulan
Langkah-langkah suatu bukti dengan menggunakan prinsip induksi matematis kuat bahwa suatu pernyataan $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n adalah sebagai berikut:

Kesimpulan
Langkah-langkah suatu bukti dengan menggunakan prinsip induksi matematis kuat yang diperluas bahwa suatu pernyataan $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq m$ untuk suatu bilangan asli m adalah sebagai berikut:

Ayo Mengomunikasikan

Mintalah siswa untuk saling berkunjung mendiskusikan hasil yang diperoleh dari diskusi kelompok. Mintalah siswa menuliskan kesimpulan hasil diskusinya secara individu di kotak yang disediakan.

Pada kegiatan diskusi ini, guru melakukan penilaian sikap.

Harapan kesimpulan diskusi kelas sebagai berikut.

Kesimpulan

Langkah-langkah suatu bukti dengan menggunakan prinsip induksi matematis kuat bahwa suatu pernyataan $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n adalah sebagai berikut:

1. Membuktikan bahwa $P(1)$ benar
2. Membuktikan bahwa untuk setiap bilangan asli k, jika $P(1)$, $P(2)$, …, $P(k)$ benar, maka $P(k+1)$ juga benar.
3. Menyimpulkan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n.

Kesimpulan

Langkah-langkah suatu bukti dengan menggunakan prinsip induksi matematis kuat yang diperluas, bahwa suatu pernyataan $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq m$ adalah sebagai berikut:

1. Membuktikan bahwa $P(m)$ benar
2. Membuktikan bahwa untuk setiap bilangan asli $n \geq m$, apabila $P(m)$, $P(m+1)$, …, $P(k)$ benar, maka $P(k+1)$ juga benar.
3. Menyimpulkan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n.

Kegiatan 3.2.2 Penerapan Prinsip Induksi Matematis Kuat

Tentu Anda masih ingat penggunaan prinsip induksi matematis dalam membuktikan pernyataan yang berkenaan dengan bilangan asli. Sekarang silakan Anda amati penggunaan prinsip induksi matematis kuat pada Contoh 3.11 di atas, yaitu:

Barisan bilangan x_n didefinisikan dengan: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n)$

untuk semua bilangan asli n. Tunjukkan bahwa $1 \le x_n \le 2$ untuk semua bilangan asli n.

Bukti

Misalkan $P(n): 1 \le x_n \le 2$ untuk bilangan asli n.

1. Langkah Dasar

Untuk $n = 1$, maka $1 \le x_1 = 1 \le 2$ bernilai benar. Jadi $P(1)$ benar.

2. Langkah Induksi

Untuk setiap bilangan asli k, misalkan $P(1)$, $P(2)$, ..., $P(k + 1)$, $P(k)$ benar. Akan ditunjukkan $P(k+1): 1 \le x_{k+1} \le 2$ bernilai benar.

Dari $P(1)$, $P(2)$, ..., $P(k - 1)$, $P(k)$ benar, maka $1 \le x_n \le 2$ untuk $n = 1, 2, ..., k - 1, k$, khususnya $1 \le x_k \le 2$ dan $1 \le x_{k-1} \le 2$. Akibatnya $2 \le (x_k + x_{k-1}) \le 4$. Dengan definisi barisan di atas, diperoleh $1 = \frac{2}{2} \le x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + x_{k-1}) \le \frac{4}{2} = 2$

Ini mengatakan bahwa $P(k+1): 1 \le x_{k+1} \le 2$ bernilai benar.

3. Kesimpulan

$P(n) : 1 \le x_n \le 2$ benar untuk semua bilangan asli n.

Ajaklah siswa mengamati penerapan induksi matematis kuat pada Kegiatan 3.2.1 dan 3.2.2

Mintalah siswa mengamati langkah-langkah perbuktian yang dilakukan, dan bandingkan dengan langkah-langkah pada induksi matematis.

Contoh 3.12

Tunjukkan bahwa setiap bilangan bulat n yang lebih dari satu habis dibagi oleh suatu bilangan prima.

Bukti

Misalkan $P(n)$ bilangan bulat positif n lebih dari satu habis dibagi oleh suatu bilangan prima.

1. *Langkah Dasar*

Jelas bahwa 2 habis dibagi oleh suatu bilangan prima, yaitu 2 itu sendiri. Jadi $P(2)$ bernilai benar.

2. *Langkah Induksi*

Untuk setiap bilangan asli $k > 1$, misalkan $P(2)$, $P(3)$, ..., $P(k - 1)$, $P(k)$ bernilai benar. Artinya semua bilangan bulat postif yang lebih dari satu sampai dengan bilangan asli k, habis dibagi oleh suatu bilangan prima.

Akan dibuktikan bahwa $P(k + 1)$ bernilai benar. Artinya bilangan asli $k + 1$ habis dibagi oleh suatu bilangan prima.

Perhatikan bilangan asli $k + 1$. Terdapat dua kemungkinan untuk bilangan ini.

a. $k + 1$ adalah suatu bilangan prima, sehingga ia (k + 1) habis dibagi oleh bilangan prima $k + 1$ itu sendiri.

b. $k + 1$ bukan suatu bilangan prima. Maka $k + 1$ dapat difaktorkan menjadi hasil kali dua bilangan asli yang lebih dari satu dan kurang atau sama dengan k, yaitu $k + 1 = k_1 \times k_2$ dengan $1 < k_1, k_2 \leq k$.

   Dengan menggunakan pemisalan bahwa semua bilangan bulat postif yang lebih dari satu dan kurang atau sama dengan k habis dibagi oleh suatu bilangan prima, sedangkan $1 < k_1, k_2 \leq k$ maka

   k_1 habis dibagi oleh suatu bilangan prima, misalkan p_1,

   dan juga k_2 habis dibagi oleh suatu bilangan prima, misalkan p_2.

   Dengan demikian, $k_1 = p_1 \times n_1$ dan $k_2 = p_2 \times n_2$ dan untuk suatu bilangan asli n_1, n_2. Oleh karena itu, diperoleh $k + 1 = k_1 \times k_2 = p_1 \times n_1 \times p_2 \times n_2$. Ini berarti $k + 1$ habis dibagi oleh suatu bilangan prima p_1 atau p_2.

Dari dua kemungkinan ini, dapat disimpulkan $k + 1$ habis dibagi oleh suatu bilangan prima. Hal ini sama dengan mengatakan bahwa $P(k - 1)$ bernilai benar.

3. *Kesimpulan*

$P(n)$: setiap bilangan bulat positif n lebih dari satu habis dibagi oleh suatu bilangan prima.

Setelah Anda mengamati dengan cermat langkah-langkah pembuktian pada induksi matematis kuat (Contoh 3.11 dan 3.12), kemudian Anda bandingkan dengan langkah-langkah pembuktian pada induksi matematis (Contoh 3.8, 3.9, dan 3.10).

Sekarang Anda bekerja secara berkelompok (3 – 4 orang) dan buatlah pertanyaan-pertanyaan yang berkenaan dengan induksi matematis dan induksi matematis kuat. Tuliskan pertanyan-pertaanyaan itu pada tempat kosong berikut.

Setelah Anda membuat pertanyaan, cobalah Anda mencoba menjawab pertanyaan tersebut.

Mintalah siwa untuk berkelompok 3 – 4 orang untuk membuat pertanyaan terkait dengan induksi matematis dan induksi matematis kuat.

Tulislah pertanyaan tersebut dalam kotak yang disediakan.

Diharapkan pertanyan yang akan dibuat siswa adalah:

1. Apa perbedaan induksi matematis dan induksi matematis kuat?
2. Kapan menggunakan induksi matematis dan kapan menggunakan induksi matematis kuat.

Ajaklah siswa untuk membandingkan prinsip induksi matematis dan prinsip induksi matematis kuat. Khususnya pembuktian pada langkah induksi.

Bantulah siswa apabila mengalami kesulitan dalam membandingkan kedua prinsip induksi tersebut.

Selanjutnyadengan membandingkan kedua prinsip induksi tersebut dan dengan melihat penggunaan prinsip induksi tersebut dalam menyelesaikan soal, ajaklah siswa untuk memperoleh informasi kapan prinsip induksi kuat digunakan dalam pembuktian suatu pernyataan.

Sekarang saatnya Anda secara berkelompok mendiskusikan dan menjawab pertanyaan berikut.

1. Bagaimana langkah-langkah pembuktian dengan induksi matematis?
2. Bagaimana langkah-langkah pembuktian dengan induksi matematis kuat?
3. Kapan kita menggunakan prinsip induksi matematis dan kapan kita menggunakan induksi matematis kuat?

Tuliskan jawaban pertanyaan-pertanyaan untuk masing-masing kelompok. Mintalah bantuan gurumu apabila Anda menemukan kesulitan atau permasalahan yang berkenaan dengan pertanyaan tersebut.

Setelah diskusi kelompok Anda lakukan, sekarang coba Anda diskusikan secara klasikan untuk mencocokkan jawaban kelompok yang telah Anda buat. Mintalah masukan atau penjelasan dari gurumu apabila dalam diskusi kelas menemukan permasalahan.

Setelah diskusi kelas, tuliskan kesimpulan Anda tentang hasil diskusi kelas tersebut secara individu dalam kotak berikut.

Ayo Menalar

Setelah memperoleh jawaban pertanyaan yang telah dibuat siswa, untuk lebih mempertajam pemahaman siswa, mintalah siswa secara berkelompok untuk menjawab pertanyaan berikut.

1. Bagaimana langkah-langkah pembuktian dengan induksi matematis?
2. Bagaimana langkah-langkah pembuktian dengan induksi kuat?
3. Kapan kita menggunakan prinsip induksi matematis dan kapan kita menggunakan induksi matematis kuat?

Mintalah siswa untuk menulis jawabannya pada kotak yang disediakan.

Alternatif Penyelesaian *Ayo Menalar* **yang diharapkan.**

1. Langkah-langkah suatu bukti dengan menggunakan prinsip induksi matematis bahwa suatu pernyataan $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n adalah sebagai berikut:
   a. Membuktikan bahwa $P(1)$ benar
   b. Membuktikan bahwa untuk setiap bilangan asli k, apabila $P(k)$ benar, maka $P(k+1)$ juga benar.
   c. Menyimpulkan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n.

   Langkah-langkah suatu bukti dengan menggunakan prinsip induksi matematis yang diperluas bahwa suatu pernyataan $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq m$ adalah sebagai berikut:
   a. Membuktikan bahwa $P(m)$ benar
   b. Membuktikan bahwa untuk setiap bilangan asli $k \geq m$, apabila $P(k)$ benar, maka $P(k+1)$ juga benar.
   c. Menyimpulkan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq m$.

2. Langkah-langkah suatu bukti dengan menggunakan prinsip induksi matematis kuat bahwa suatu pernyataan$P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n adalah sebagai berikut:
   a. Membuktikan bahwa $P(1)$ benar
   b. Membuktikan bahwa untuk setiap bilangan asli k, jika $P(1)$, $P(2)$, …, $P(k)$ benar, maka $P(k+1)$ juga benar.
   c. Menyimpulkan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n.

   Langkah-langkah suatu bukti dengan menggunakan prinsip induksi matematis kuat yang diperluas, bahwa suatu pernyataan $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq m$ adalah sebagai berikut:
   a. Membuktikan bahwa $P(m)$ benar
   b. Membuktikan bahwa untuk setiap bilangan asli $n \geq m$, apabila $P(m)$, $P(m+1)$, …, $P(k)$ benar, maka $P(k+1)$ juga benar.
   c. Menyimpulkan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n.

3. Induksi matematis kuat digunakan apabila dalam langkah pembuktian pernyataan $P(k+1)$ benar tidak hanya memerlukan kebenaran $P(k)$ tetapi juga kebenaan $P(n)$ untuk n sebelum k.

   Sedangkan induksi matematis digunakan apabila dalam langkah pembuktian pernyataan $P(k+1)$ benar hanya memerlukan kebenaran $P(k)$.

Alternatif Penyelesaian

Latihan 3.2

1.a. Tidak bisa.

b. ***Langkah Induksi***

Untuk setiap bilangan asli $k \geq 6$, misalkan $P(6)$, $P(7)$, ..., $P(k–1)$, $P(k)$ benar. Artinya, $n^4 – n^2$ habis dibagi 12 untuk $n = 6, 7, ..., k– 1, k$.

Akan ditunjukkan $P(k + 1)$ benar, artinya

$(k + 1)^4 – (k + 1)^2$ habis dibagi 12.

Karena $n^4 – n^2$ habis dibagi 12 untuk $n = 6, 7, ..., k– 1, k$.

maka

$(k – 5)^4 – (k – 5)^2$ juga habis dibagi 12.

Latihan 3.2

1. a. Apakah kalian dapat membuktikan pernyataan $n^4 – n^2$ habis dibagi 12 untuk semua bilangan asli n dengan menggunakan induksi matematis seperti biasanya ?
   b. Cobalah untuk membuktikan pernyataan $n^4 – n^2$ habis dibagi 12 untuk semua bilangan asli n dengan menggunakan induksi matematis kuat.
2. Buktikan hasil-hasil berikut dengan menggunakan induksi kuat
   a. Misalkan $x_0 = 1, x_1 = 2, x_{n+1} = \frac{3x_n + 4x_{n-1}}{12}$ dengan n adalah bilangan asli.
   Buktikan : $x_{n+1} \leq 1$, untuk semua bilangan asli n.
   b. Misalkan $x_0 = 1,\ x_1 = 1,\ x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ dengan n adalah bilangan asli.
   Buktikan : $x_{n+1} \leq 2^n$, untuk semua bilangan asli n.
   c. $x + y$ adalah faktor dari $x^{2n} – y^{2n}$, untuk setiap bilangan asli n.
   d. Misalkan barisan $a_1, a_2, a_3, ...$ didefinisikan sebagai berikut.
   $a_1 = 1,\ a_2 = 2, a_3 = 3$, dan $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$. Buktikan bahwa $a_n < 2^n$.
3. Perhatikan kembali barisan Fibonacci:
   1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, …
   di mana dua suku pertama adalah 1 dan 1, dan sebarang suku selanjutnya adalah jumlah dua suku sebelumnya. Kita menyatakan suku ke-n dari barisan ini sebagai F_n. Jadi, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, dan $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.
   Buktikan suku ke-n barisan ini dapat dinyatakan secara eksplisit sebagai $F_n = \frac{\left(\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\right)^n - \left(\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)\right)^n}{\sqrt{5}}$, untuk semua n bilangan asli.
   (**Amati**: suku-suku barisan Fibonacci merupakan bilangan Asli, tapi dalam rumus tersebut memuat bilangan irasional $\sqrt{5}$, mungkinkah?). Dalam matematika, dapat terjadi sesuatu yang kelihatannya secara intuisi) tidak mungkin, namun dapat terjadi.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}(k + 1)^4 – (k+1)^2 &= (k – 5 + 6)^4 – (k– 5 + 6)^2 \\ &= (k – 5)^4 + 24(k – 5)^3 + 216(k – 5)^2 + 864(k – 5) \\ &\quad + 1.296 – [(k – 5)^2 + 12(k – 5) + 36] \\ &= (k – 5)^4 – (k – 5)^2 + 24(k – 5)^3 + 216(k – 5)^2 \\ &\quad + 853(k – 5) + 1.260. \\ &= (k – 5)^4 – (k – 5)^2 + 12[2(k – 5)^3 + 18(k – 5)^2 \\ &\quad + 71(k – 5) + 105.\end{aligned}$$

Karena $(k – 5)^4 – (k – 5)^2$ juga habis dibagi 12 maka

$(k + 1)^4 – (k+1)^2 = (k – 5)^4 – (k – 5)^2 + 12[2(k – 5)^3 + 18(k – 5)^2 + 71(k – 5) + 105$ Juga habis dibagi 12.

Jadi $P(k + 1)$ benar.

2. a. ***Langkah Induksi***

Untuk setiap bilangan asli k, misalkan $P(1)$, $P(2)$, …, $P(k–1)$, $P(k)$ benar. Artinya, $x_2 \leq 1$, $x_3 \leq 1$, …, $x_k \leq 1$, $x_{(k+1)} \leq 1$. Akan ditunjukkan $P(k+1)$ benar, yaitu $x_{(k+2)} \leq 1$.

Perhatikan bahwa $x_{(k+2)} = \dfrac{3x_{k+1} + 4x_k}{12} \leq \dfrac{3 \cdot 1 + 4 \cdot 1}{12} \leq \dfrac{7}{12} \leq 1$.

Jadi $P(k+1)$ benar.

b. ***Langkah Induksi***

Untuk setiap bilangan asli k, misalkan $P(1)$, $P(2)$, …, $P(k–1)$, $P(k)$ benar. Artinya, $x_2 \leq 2^1$, $x_3 \leq 2^2$, ..., $x_k \leq 2^{k+1}$, $x_{k+1} \leq 2^k$

Akan ditunjukkan $P(k+1)$ benar, yaitu $x_{k+2} \leq 2^{k+1}$.

Perhatikan bahwa $x_{k+2} = x_{k+1} + x_k \leq 2^k + 2^{k-1} \leq 2^k + 2^k = 2^{k+1}$.

Jadi $P(k+1)$ benar.

c. ***Langkah Induksi***

Untuk setiap bilangan asli k, misalkan $P(1)$, $P(2)$, …, $P(k)$ benar. Artinya $x + y$ adalah faktor dari $x^{2k} – y^{2k}$ untuk $k = 1, 2, ..., k – 1, k$. Akan ditunjukkan $P(k+1)$ benar.

Perhatikan bahwa $x^{2(k+1)} – y^{2(k+1)} = x^{2k+2} – y^{2k+2} = (x^{2k} – y^{2k})(x^2 – y^2) – x^{2k}y^2 + x^2y^{2k}$

$= (x^{2k} – y^{2k})(x^2 – y^2) – (x^2 – y^2)(x^{2k–2} – y^{2k–2})$

$= (x^{2k} – y^{2k})(x^2 – y^2) – (x^2 – y^2)(x^{2(k–1)} – y^{2(k–1)})$.

Karena $x + y$ adalah faktor dari $x^{2k} – y^{2k}$ dan juga $x + y$ adalah faktor dari $x^{2(k+1)} – y^{2(k+1)}$, maka $x^{2k} – y^{2k} = P(x)(x + y)$ dan $x^{2(k–1)} – y^{2(k–1)} = Q(x)(x + y)$ untuk suatu suku banyak $P(x)$ dan $Q(x)$.

Akibatnya $x^{2(k–1)} – y^{2(k–1)} = P(x)(x + y)(x^2 – y^2) – (x^2 – y^2)Q(x)(x + y)$

$= (x + y)(P(x)(x + y)(x^2 – y^2) – (x^2 – y^2)Q(x))$. Ini mengatakan $x + y$ adalah faktor dari $x^{2(k+1)} – y^{2(k+1)}$.

Jadi $P(k+1)$ benar.

d. ***Langkah Induksi***

Untuk setiap bilangan asli k, misalkan $P(1)$, $P(2)$, ..., $P(k-1)$, $P(k)$ benar. Artinya, $a_1 \leq 2^1$, $a_2 \leq 2^2$, ..., $a_{k-1} \leq 2^{k-1}$, $a_k \leq 2^k$

Akan ditunjukkan $P(k+1)$ benar, yaitu $a_{k-1} \leq 2^{k-1}$.

Perhatikan bahwa $a_{k-1} = a_k + a_{k-1} + a_{k-2} \leq 2^k + 2^{k-1} + 2^{k-2}$

$$= 2^k + \frac{1}{2}2^k + \frac{1}{4} \cdot 2^k \leq 2^{k+1}.$$

Jadi $P(k-1)$ benar.

3. ***Langkah Induksi***

Untuk setiap bilangan asli k, misalkan $P(1)$, $P(2)$, ..., $P(k-1)$, $P(k)$ benar.

Artinya, rumus tersebut benar untuk $i \leq k$, yaitu

$$F_i = \frac{\left(\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\right)^i - \left(\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)\right)^i}{\sqrt{5}},\ i = 1,\ 2,\ ...,\ k.$$

Akan ditunjukkan $P(k-1)$ benar, yaitu $F_{k+1} = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\right)^{k+1} - \left(\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)\right)^{k+1}}{\sqrt{5}}$

Untuk $n \geq 3$, dengan menggunakan persamaan $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, maka $F_{k+1} = F_k + F_{k\text{-}1}$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\right)^k - \left(\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)\right)^k}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\right)^{k+1} - \left(\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)\right)^{k+1}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\left[\left(\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\right)^k - \left(\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\right)^{k-1}\right] - \left[\left(\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)\right)^k - \left(\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)\right)^{k-1}\right]}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\right)^{k-1}\left[\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)+1\right] - \left(\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)\right)^{k-1}\left[\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)+1\right]}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\right)^{k-1}\left[\frac{1}{4}\left(2+2\sqrt{5}+4\right)\right]-\left(\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)\right)^{k-1}\left[\frac{1}{4}\left(2-2\sqrt{5}+4\right)\right]}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\right)^{k-1}\left[\frac{1}{4}\left(1+2\sqrt{5}+5\right)\right]-\left(\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)\right)^{k-1}\left[\frac{1}{4}\left(1-2\sqrt{5}+5\right)\right]}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\right)^{k-1}\left(\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\right)^{2}-\left(\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)\right)^{k-1}\left(\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)\right)^{2}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\right)^{k+1}-\left(\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)\right)^{k+1}}{\sqrt{5}}$$

Jadi $P(k-1)$ benar.

Pengayaan

Proyek

Kegiatan

Kerjakan Tugas berikut secara berkelompok (3 – 4) orang, kemudian laporkan hasilnya dalam bentuk tertulis.

1. Barisan Terbatas

Pada Contoh 3.11 telah ditunjukkan bahwa barisan bilangan x_n yang didefinisikan dengan: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n)$ untuk semua bilangan asli *n*, yang memenuhi $1 \le x_n \le 2$ untuk semua bilangan asli *n*. Barisan bilangan tersebut adalah: 1; 2; 1,5; 1,75; 1,625; ...; ...

a. Tentukan suku ke-6 barisan tersebut.

b. Apakah barisan tersebut mempunyai suku terkecil? Sebutkan.

c. Apakah barisan tersebut mempunyai suku terbesar? Sebutkan.

d. Ingat kembali pengertian barisan pada buku sebelumnya (buku SMP). Apakah pengertian barisan pada Buku SMP dapat diterapkan pada barisan di atas. Bila tidak dapat diterapkan, carilah pengertian barisan di buku lain yang lebih "*make sense*".

e. Bagaimanakah perilaku suku-suku barisan tersebut setelah suku ke-2?

f. Apakah ada suku barisan yang lebih dari 2? Mengapa demikian?

Barisan tersebut merupakan contoh ***barisan terbatas***.

Proyek

Kegiatan

Buatlah tulisan sekitar 1 halaman berkaitan dengan barisan terbatas. Tulisanmu diantaranya berisi: contoh-contoh barisan terbatas, pengertian barisan terbatas, pengertian barisan tidak terbatas dan contoh-contohnya.

2. Barisan Monoton

a. Perhatikan barisan bilangan real x_n yang didefinisikan dengan $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \frac{1}{4}(2x_n + 3)$ untuk semua n bilangan asli.

   i. Tuliskan tujuh suku pertama dari barisan tersebut.

   ii. Tunjukkan bahwa:

      1) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$.

      2). $x_n \leq x_{n+1}$ untuk semua n bilangan asli.

   Barisan x_n tersebut merupakan contoh **barisan monoton naik**.

b. Perhatikan barisan bilangan real x_n yang didefinisikan dengan $x_1 = 8$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 2$ untuk semua n bilangan asli.

   i. Tuliskan tujuh suku pertama dari barisan tersebut.

   ii. Tunjukkan bahwa:

      1) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$.

      2) $x_{n+1} \geq x_{n+1}$ untuk semua n bilangan asli.

   Barisan x_n tersebut merupakan contoh **barisan monoton turun**.

   Barisan x_n dikatakan barisan monoton apabila ia barisan monoton naik atau monoton turun.

Proyek

Kegiatan

Buatlah tulisan tentang barisan mononton yang meliputi: definisi barisan monoton naik, barisan monoton turun, barisan monoton, contoh-contoh tentang barisan yang monoton dan yang tidak monoton.

3. Masalah eksistensi atau keujudan limit barisan

a. Amati barisan bilangan x_n yang didefinisikan oleh:
$x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2 + x_1}, x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ untuk semua bilangan asli n.

i. Tentukan suku ke-2, ke-3, dan ke-4 barisan tersebut.

ii. Apakah barisan tersebut mempunyai suku terkecil? Sebutkan.

iii. Apakah barisan tersebut mempunyai suku terbesar? Jelaskan.

iv. Buatlah pendugaan (*conjecture*) tentang keterbatasan barisan tersebut. Apakah barisan tersebut terbatas.

v. Apakah barisan tersebut naik?

Barisan bilangan x_n di atas yang dinyatakan dalam:

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}}$$

Untuk menentukan nilai bilangan tersebut, kita lakukan langkah beri nama x, lakukan operasi aljabar pada x, yakni:

$$x = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}}$$

Kemudian kuadratkan, didapat persamaan kuadrat $x^2 = 2 + x$, selesaikan, diperoleh $x = 2$.

Permasalahan: apakah langkah yang telah kita lakukan tersebut benar atau valid?, jelaskan.

b. Perhatikan barisan y_n yang didefinisikan oleh:

$$y_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k \text{ untuk semua bilangan cacah } n.$$

Untuk menentukan nilai bilangan tersebut, kita lakukan langkah beri nama y, lakukan operasi aljabar pada y, yakni:

$$y = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots (*)$$

Kalikan ke dua ruas (*) dengan 2, didapat:

$$2y = 2 + 4 + 8 + 16 + \dots$$

Kurangi ke dua ruas (*) dengan 1, didapat:

$$y - 1 = 2 + 4 + 8 + 16 + \dots$$

Ternyata diperoleh $2y = y - 1$. Jadi $y = -1$. Didapat hasil yang tidak valid. Dimana letak kesalahan bernalarnya?, jelaskan.

4. Teorema Keujudan limit barisan.

Setiap barisan yang naik atau turun (salah satu) dan terbatas, mempunyai limit. (Bukti teorema ini diberikan pada Tahun ke-2 Perkuliahaan di Jurusan Matematika).

Buktikan bahwa:

a. Barisan x_n pada proyek 3 di atas naik dan terbatas, sehingga keujudan bilangan tersebut dijamin oleh Teorema keujudan limit barisan.

b. Barisan y_n pada proyek 3 di atas adalah naik dan tidak terbatas.

1. Buktikan dengan menggunakan induksi matematis:

   a. $a + (a + b) + (a + 2b) + ... + (a + (n + 1)b) = \frac{n}{2}(2a + (n + 1)b)$, untuk setiap bilangan asli n. (Jumlah n suku pertama barisan aritmetika)

   b. $a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} = a\frac{\left(r^n - 1\right)}{r - 1}$, $r \neq 1$, untuk setiap bilangan asli n.

   (Jumlah n suku pertama barisan geometri)

   $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, untuk setiap bilangan asli n.

   c. $1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$ untuk setiap bilangan asli n.

   d. $\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + ... + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ untuk setiap bilangan asli n

   f. $\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$, untuk setiap bilangan asli n.

   g. $\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)...\left(1+\frac{1}{n}\right) = n+1$, untuk setiap bilangan asli n.

   h. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + ... + \sin nx = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{nx}{2}$, untuk setiap bilangan asli n.

i. $\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{2\sin \frac{x}{2}}$, untuk setiap bilangan asli n.

j. $\sin x + 2\sin 2x + 3\sin 3x + \ldots + n\sin nx = \frac{(n+1)\sin nx - n\sin(n+1)x}{4\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$,

untuk setiap bilangan asli n.

k. $6n + 1 < 3^n$, untuk setiap bilangan asli $n \geq 3$.

l. $x + y$ adalah faktor dari $x^{2n} - y^{2n}$, untuk setiap bilangan asli n.

m. Jika $0 < x \leq 1$, maka untuk setiap bilangan asli n berlaku $x \leq x^n$.

2. Tentukan suatu bilangan asli pertama m, sehingga pernyataan menjadi benar untuk setiap bilangan asli $m \geq n$.

   a. $3n + 25 < 3^n$

   b. $2n + 1 \leq 2^{n-1}$.

   c. $n! > n^3$

   d. $n - 100 > \log n$.

3. Misalkan suatu barisan bilangan a_n, didefinisikan dengan $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$ dan $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$. Buktikan bahwa $a_n < 2^n$, untuk setiap bilangan asli n.

4. Buktikan bahwa setiap bilangan asli n dapat dinyatakan dalam bentuk reprensentasi biner, $n = c_r 2^r + c_{r-1} 2^{r-1} + \ldots + c_1 2^1 + c_0$ dengan $c_0, c_1, \ldots, c_r$ bilangan asli.

5. Diberikan dua penggaris, yang satu berukuran 3 satuan panjang dan yang lain 5 satuan panjang. Tunjukkan bahwa Anda dapat mengukur sebarang panjang yang lebih besar atau sama dengan 8 dengan hanya menggunakan dua penggaris tersebut.

1. a. ***Langkah induksi***

Untuk $n = k$, misalkan $P(k)$ bernilai benar. Jadi,

$$a + (a + b) + (a + 2b) + \ldots + (a + (k - 1)b) = \frac{k}{2}(2a + (k - 1)b).$$

Akan ditunjukkan terbukti benar juga untuk $P(k + 1)$ yaitu

$$a + (a + b) + (a + 2b) + \ldots + (a + (k - 1)b) + (a + kb) = \frac{k+1}{2}(2a + k\,b).$$

Karena $P(k)$ benar, ruas kiri persamaan di atas dapat ditulis menjadi

$a + (a + b) + (a + 2b) + \ldots + (a + (k - 1)b) + (a + kb)$

$$= \frac{k}{2}(2a + (k - 1)b) + a + kb$$

$$= \frac{k}{2}(2a + kb - b) + a + kb)$$

$$= \frac{k}{2}(2a + kb) - \frac{k}{2}b + a + kb$$

$$= \frac{k}{2}(2a + kb) + \frac{k}{2}b + a$$

$$= \frac{k}{2}(2a + kb) + \frac{1}{2}(2a + kb)$$

$$= \frac{k+1}{2}(2a + k\,b).$$

Jadi, terbukti bahwa $P(k + 1)$:

$$a + (a + b) + (a + 2b) + \ldots + (a + (k - 1)b) + (a + kb) = \frac{k+1}{2}(2a + k\,b)$$

bernilai benar.

b. ***Langkah induksi***

Untuk $n = k$, misalkan $P(k)$ bernilai benar. Jadi,

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{k-1} = \frac{a(r^k - 1)}{r - 1}$$

Akan ditunjukkan terbukti benar juga untuk $P(k + 1)$ yaitu

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{k-1} + ar^k = \frac{a(r^{k+1} - 1)}{r - 1}$$

Karena $P(k)$ benar, ruas kiri persamaan di atas dapat ditulis menjadi

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{k-1} + ar^k = \frac{a(r^k - 1)}{r - 1} + ar^k$$

$$= \frac{a(r^k - 1)}{r - 1} + \frac{ar^k(r - 1)}{r - 1}$$

$$= \frac{ar^{k+1} - a}{r - 1} = \frac{a(r^{k+1} - 1)}{r - 1}.$$

Jadi, terbukti bahwa $P(k + 1)$:

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{k-1} + ar^k = \frac{a(r^{k+1} - 1)}{r - 1} \text{ bernilai benar.}$$

c. ***Langkah induksi***

Untuk $n = k$, misalkan $P(k)$ bernilai benar. Jadi,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 = \frac{k^2(k + 1)^2}{4}.$$

Akan ditunjukkan terbukti benar juga untuk $P(k + 1)$ yaitu

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + (k + 1)^3 = \frac{(k + 1)^2(k + 2)^2}{4}.$$

Karena $P(k)$ benar, ruas kiri persamaan di atas dapat ditulis menjadi

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + (k + 1)^3 = \frac{k^2(k + 1)^2}{4} + (k + 1)^3$$

$$= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + \frac{4(k+1)^3}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

Jadi, terbukti bahwa $P(k + 1)$:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$ bernilai benar.

d. ***Langkah induksi***

Untuk $n = k$, misalkan $P(k)$ bernilai benar. Jadi,

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2k-1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}.$$

Akan ditunjukkan terbukti benar juga untuk $P(k + 1)$ yaitu

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2k-1)^2 + (2k+1)^2 = \frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3}.$$

Karena $P(k)$ benar, ruas kiri persamaan di atas dapat ditulis menjadi

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2k-1)^2 + (2k+1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + (2k+1)^2$$

$$= \frac{(2k+1)(2k^2-k+6k+3)}{3}$$

$$= \frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3}.$$

Jadi, terbukti bahwa $P(k + 1)$:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2k-1)^2 + (2k+1)^2 = \frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3}$$

bernilai benar.

e. ***Langkah induksi***

Untuk $n = k$, misalkan $P(k)$ bernilai benar. Jadi,

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+...+\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)}.$$

Akan ditunjukkan terbukti benar juga untuk $P(k + 1)$ yaitu

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+...+\frac{1}{k(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$
$$=\frac{(k+1)(k+4)}{4(k+2)(k+3)}.$$

Karena $P(k)$ benar, ruas kiri persamaan di atas dapat ditulis menjadi

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+...+\frac{1}{k(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$
$$=\frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$
$$=\frac{k(k+3)^2}{4(k+1)(k+2)(k+3)}+\frac{4}{4(k+1)(k+2)(k+3)}$$
$$=\frac{k^3+6k^2+9k+4}{4(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{(k+1)(k+1)(k+4)}{4(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{(k+1)(k+4)}{4(k+2)(k+3)}$$

Jadi, terbukti bahwa $P(k + 1)$:

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+...+\frac{1}{k(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$
$$=\frac{(k+1)(k+4)}{4(k+2)(k+3)}$$ bernilai benar.

f. ***Langkah induksi***

Untuk $n = k$, misalkan $P(k)$ bernilai benar. Jadi,

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}.$$

Akan ditunjukkan terbukti benar juga untuk $P(k + 1)$ yaitu

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

Karena $P(k)$ benar, ruas kiri persamaan di atas dapat ditulis menjadi

$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + k(k+1) + (k+1)(k+2)$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2)$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + \frac{3(k+1)(k+2)}{3}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

Jadi, terbukti bahwa $P(k + 1)$:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

bernilai benar.

g. ***Langkah induksi***

Untuk $n = k$, misalkan $P(k)$ bernilai benar. Jadi,

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right) ... \left(1+\frac{1}{k}\right) = k + 1,$$

Akan ditunjukkan terbukti benar juga untuk $P(k + 1)$ yaitu

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right) ... \left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k+1}\right) = k + 2,$$

Karena $P(k)$ benar, ruas kiri persamaan di atas dapat ditulis menjadi

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k+1}\right) = (k+1)\left(1+\frac{1}{k+1}\right)$$

$$= k + 1 + 1 = k + 2.$$

Jadi, terbukti bahwa $P(k + 1)$:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k+1}\right) = k + 2,$$

bernilai benar.

h. ***Langkah induksi***

Untuk $n = k$, misalkan $P(k)$ bernilai benar. Jadi,

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin kx = \frac{\sin\left(\frac{k+1}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}} \sin\frac{kx}{2}.$$

Akan ditunjukkan terbukti benar juga untuk $P(k + 1)$ yaitu

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin kx + \sin(k+1)x = \frac{\sin\left(\frac{k+1}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{k+1}{2}x\right)$$

Karena $P(k)$ benar, ruas kiri persamaan di atas dapat ditulis menjadi $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin kx + \sin(k + 1)x$

$$= \frac{\sin\left(\frac{k+1}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}} \sin\frac{kx}{2} + \sin(k+1)$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{k+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{k}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}} + \frac{\sin(k+1)x\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{k+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{k}{2}x\right)+2\sin\left(\frac{k+1}{2}x\right)\cos\left(\frac{k+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}} \quad (\sin 2\alpha = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha))$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{k+1}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}} \left(\sin\left(\frac{k}{2}x\right) + 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{k+1}{2}x\right)\right)$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{k+1}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}} \left(\sin\left(\frac{k}{2}x\right) + \sin\left(-\left(\frac{k}{2}x\right)\right) + \sin\left(\frac{k+2}{2}x\right)\right)$$

$$(\,2\sin(\alpha)\cos(\beta) = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)\,)$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{k+1}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{k+2}{2}x\right) . (\,\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha))$$

Jadi, terbukti bahwa $P(k + 1)$:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + ... + \sin kx + \sin(k+1)x = \frac{\sin\left(\frac{k+2}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{k+1}{2}x\right)$$

bernilai benar.

i. ***Langkah induksi***

Untuk $n = k$, misalkan $P(k)$ bernilai benar. Jadi,

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + ... + \cos kx = \frac{\sin\left(\frac{2k+1}{2}x\right)}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Akan ditunjukkan terbukti benar juga untuk $P(k + 1)$ yaitu

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + ... + \cos kx + \cos(k+1)x = \frac{\sin\left(\frac{2k+3}{2}x\right)}{2\sin\frac{x}{2}}$$

Karena $P(k)$ benar, ruas kiri persamaan di atas dapat ditulis menjadi

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + ... + \cos kx + \cos(k+1)x$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{2k+1}{2}x\right)}{2\sin\frac{x}{2}} + \cos(k+1)x$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{2k+1}{2}x\right)}{2\sin\frac{x}{2}} + \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos(k+1)x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{2k+1}{2}x\right) + \sin(\frac{x}{2} - kx - x) + \sin(\frac{x}{2} + kx + x)}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{2k+1}{2}x\right) + \sin(-\frac{2k+1}{2}x) + \sin(\frac{2k+3}{2}x)}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{2k+3}{2}x\right)}{2\sin\frac{x}{2}}$$

Jadi, terbukti bahwa $P(k + 1)$:

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + ... + \cos kx + \cos(k+1)x = \frac{\sin\left(\frac{2k+3}{2}x\right)}{2\sin\frac{x}{2}}$$

bernilai benar.

j. ***Langkah induksi***

Untuk $n = k$, misalkan $P(k)$ bernilai benar. Jadi,

$$\sin x + 2\sin 2x + 3\sin 3x + ... + k\sin kx = \frac{(k+1)\sin(kx) - k\sin(k+1)x}{4\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Akan ditunjukkan terbukti benar juga untuk $P(k + 1)$ yaitu

$$\sin x + 2\sin 2x + 3\sin 3x + ... + k\sin kx + (k+1)\sin(k+1)x =$$

$$\frac{(k+2)\sin(k+1)x - (k+1)\sin(k+2)x}{4\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Karena $P(k)$ benar, ruas kiri persamaan di atas dapat ditulis menjadi

$\sin x + 2\sin 2x + 3\sin 3x + ... + k\sin kx + (k+1)\sin(k+1)x$

$$= \frac{(k+1)\sin(kx) - k\sin(k+1)x}{4\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} + (k+1)\sin(k+1)x$$

$$= \frac{(k+1)\sin(kx) - k\sin(k+1)x + 4(k+1)\sin(k+1)x\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{(k+1)\sin(kx) - k\sin(k+1)x + 4(k+1)\sin(k+1)x[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x]}{4\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)},$$

$(\sin^2\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\alpha))$

$$= \frac{(k+1)\sin(kx) - k\sin(k+1)x + 2(k+1)\sin(k+1)x - 2(k+1)\sin(k+1)x\cos x]}{4\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{(k+1)\sin(kx) - k\sin(k+1)x + 2(k+1)\sin(k+1)x - (k+1)\sin(kx) - (k+1)\sin(k+2)x]}{4\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)},$$

$(2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$

$$= \frac{-k\sin(k+1)x + 2(k+1)\sin(k+1)x - (k+1)\sin(k+2)x]}{4\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{(k+2)\sin(k+1)x - (k+1)\sin(k+2)x}{4\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Jadi, terbukti bahwa $P(k+1)$:

$\sin x + 2\sin 2x + 3\sin 3x + ... + k\sin kx + (k+1)\sin(k+1)x$

$$= \frac{(k+2)\sin(k+1)x - (k+1)\sin(k+2)x}{4\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$ bernilai benar.

k. ***Langkah induksi***

Untuk $n = k$, misalkan $P(k)$ bernilai benar. Jadi, $6k + 1 < 3^k$.

Akan ditunjukkan terbukti benar juga untuk $P(k + 1)$ yaitu

$6(k+1) + 1 < 3^{k+1}$.

Karena $P(k)$ benar, ruas kiri persamaan di atas dapat ditulis menjadi

$6(k+1) + 1 = 6k + 1 + 6 < 3^k + 6$.

Akan ditunjukkan bahwa $3^k + 6 < 3^{k+1}$.

Perhatikan bahwa $3^{k+1} - (3^k + 6) = 3 \cdot 3^k - 3^k - 6 = 2 \cdot 3^k - 6 = 6 \cdot 3^{k-1} - 6 > 0$

untuk $k \geq 3$. Berarti $3^k + 6 < 3^{k+1}$.

Jadi, terbukti bahwa $P(k + 1) : 6(k+1) + 1 < 3^{k+1}$ bernilai benar.

l. ***Langkah induksi***

Untuk $n = k$, $n = k+ 1$, misalkan $P(k)$ dan $P(k +1)$ bernilai benar. Jadi,

$x + y$ adalah faktor dari $x^{2k} - y^{2k}$, dan $x + y$ adalah faktor dari $x^{2k+2} - y^{2k+2}$.

Akan ditunjukkan terbukti benar juga untuk $P(k + 2)$ yaitu

$x + y$ adalah faktor dari $x^{2k+4} - y^{2k+4}$.

Ekspresi $x^{2k+4} - y^{2k+4}$ dapat ditulis sebagai

$$x^{2k+4} - y^{2k+4} = x^{2k+4} + x^{2k+2}y^2 - x^2y^{2k+2} - y^{2k+4} - x^{2k+2}y^2 + x^2y^{2k+2}$$

$$= (x^{2k+2} - y^{2k+2})(x^2 + y^2) - x^2y^2(x^{2k} - y^{2k})$$

Karena $P(k)$ dan $P(k +1)$ benar, berarti $x + y$ adalah faktor dari $x^{2k} - y^{2k}$, dan juga faktor dari $x^{2k+2} - y^{2k+2}$. Oleh karena itu, $x + y$ adalah faktor dari ruas kanan persamaan di atas.

Jadi, terbukti bahwa $P(k + 2) : x + y$ adalah faktor dari $x^{2k+4} - y^{2k+4}$

bernilai benar.

m. ***Langkah induksi***

Untuk $n = k$, misalkan $P(k)$ bernilai benar. Jadi, berlaku $x^k \leq x$.

Akan ditunjukkan terbukti benar juga untuk $P(k + 1)$ yaitu $x^{k+1} \leq x$.

Karena $P(k)$ benar, ruas kiri pertidaksamaan di atas dapat ditulis sebagai

$x^{k+1} = x^k \cdot x \leq x \cdot x \leq x$ (karena $0 < x \leq 1$).

Jadi, terbukti bahwa $P(k + 1) : x^{k+1} \leq x$ bernilai benar.

2. a. $m = 4$, karena $3(4) + 25 < 3^4$,
   b. $m = 5$, karena $2(5) + 1 \leq 2^{5-1}$.
   c. $m = 6$, karena $6! > 6^3$.
   d. $m = 103$, karena $103 - 100 > \log(103) = 2{,}013$.

3. ***Langkah induksi***

   Untuk $n = k$, $n = k + 1$, $n = k + 2$, misalkan $P(k)$, $P(k+1)$, $P(k+2)$ bernilai benar. Jadi berlaku $a_k < 2^k$, $a_{k+1} < 2^{k+1}$, dan $a_{k+2} < 2^{k+2}$.
   Akan ditunjukkan terbukti benar juga untuk $P(k + 3)$ yaitu $a_{k+3} < 2^{k+3}$.

   Karena $P(k)$, $P(k+1)$, $P(k+2)$ benar, ruas kiri pertidaksamaan di atas dapat ditulis menjadi
   $$\begin{aligned} a_{k+3} &= a_{k+2} + a_{k+1} + a_k < 2^{k+2} + 2^{k+1} + 2^k \\ &= 2^k(2^2 + 2 + 1) \\ <2^k(2^3) &= 2^{k+3}. \end{aligned}$$
   Jadi, terbukti bahwa $P(k + 3) : a_{k+3} < 2^{k+3}$ bernilai benar.

4. ***Langkah induksi***

   Untuk $2 \leq n < k$, misalkan $P(n)$ bernilai benar. Artinya setiap bilangan asli yang lebih kecil dari k dapat dinyatakan dalam bentuk representasi biner.

   Akan ditunjukkan $P(k)$ bernilai benar yaitu bilangan asli k dapat dinyatakan dalam bentuk representasi biner.

   Akan diperhatikan 2 kasus. Kasus pertama jika k bilangan asli genap, maka $\frac{k}{2}$ adalah bilangan asli yang lebih kecil dari k. Berarti $\frac{k}{2}$ dapat dinyatakan dalam bentuk representasi biner. Misalkan, $\frac{k}{2} = c_r 2^r + c_{r-1}2^{r-1} + \ldots + c_1 2^1 + c_0$, atau

   $k = c_r 2^{r+1} + c_{r-1}2^r + \ldots + c_1 2^2 + 2c_0$.

   Jadi, k dapat dinyatakan dalam bentuk representasi biner.

   Kasus kedua jika k bilangan asli ganjil, maka $\frac{k-1}{2}$ adalah bilangan asli yang lebih kecil dari k. Berarti $\frac{k-1}{2}$ dapat dinyatakan dalam bentuk representasi biner. Misalkan, $\frac{k-1}{2} = c_r 2^r + c_{r-1}2^{r-1} + \ldots + c_1 2^1 + c_0$, atau

$k = c_r 2^{r+1} + c_{r-1} 2^r + \ldots + c_1 2^2 + 2c_0 + 1.$

Jadi, k dapat dinyatakan dalam bentuk representasi biner.

Jadi, $P(k)$ bernilai benar yaitu bilangan asli k dapat dinyatakan dalam bentuk representasi biner.

5. ***Langkah induksi***

Untuk $8 \leq n \leq k$, misalkan $P(n)$ bernilai benar, artinya sebarang panjang n satuan yang lebih besar atau sama dengan 8 satuan dapat diukur dengan menggunakan kedua penggaris tersebut.

Akan ditunjukkan $P(k + 1)$ benar. Karena kita sudah menunjukkan $P(10)$ benar, maka kita asumsikan $k + 1 \geq 11$. Dengan mengurangkan 3 pada kedua ruas pertidaksamaan akan diperoleh $(k + 1) - 3 \geq 8$. Oleh karena itu kita dapat mengukur panjang $(k + 1) - 3$ satuan dengan menggunakan kedua penggaris, misalkan

$(k + 1) - 3 = 3m + 5n$, atau $k + 1 = 3(m + 1) + 5n$. Hal ini berarti, kita dapat mengukur panjang $k + 1$ satuan dengan menggunakan kedua penggaris.

Jadi, $P(k + 1)$ benar.

Diagonal Bidang, Diagonal Ruang, Bidang Diagonal, dan Penerapannya

Kompetensi Dasar Dan Pengalaman Belajar

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
1.1 Menghayati dan mengamalkan ajaran agama yang dianutnya 2.1 Menghayati perilaku disiplin, sikap kerjasama, sikap kritis dan cermat dalam bekerja menyelesaikan masalah kontekstual. 2.2 Memiliki dan menunjukkan rasa ingin tahu, motivasi internal, rasa senang dan tertarik dan percaya diri dalam melakukan kegiatan belajar ataupun memecahkan masalah nyata. 3.6 Menganalisis konsep dan sifat diagonal ruang, diagonal bidang, dan bidang diagonal dalam bangun ruang dimensi tiga serta menerapkannya dalam memecahkan masalah. 4.6 Menggunakan berbagai prinsip dan sifat diagonal ruang, diagonal bidang, dan bidang diagonal dalam bangun ruang dimensi tiga serta menerapkannya dalam memecahkan masalah.	Melalui pembelajaran diagonal ruang, diagonal bidang, dan bidang diagonal siswa memperoleh pengalaman belajar: 1. Mengidentifikasikan diagonal ruang, diagonal bidang, dan bidang diagonal dalam bangun ruang dimensi tiga. 2. Menemukan sifat diagonal ruang, diagonal bidang, dan bidang diagonal dalam ruang dimensi tiga. 3. Menerapkan konsep dan sifat diagonal ruang, diagonal bidang, dan bidang diagonal dalam memecahkan masalah.

Biografi Euclid

Sumber: The Britannica Guide To Geometry

Euclid merupakan seorang matematikawan yang hidup sekitar tahun 300 SM di Alexandria dan sering disebut sebagai "Bapak Geometri". Dialah yang mengungkapkan bahwa:

1. titik adalah 1 dimensi
2. garis adalah 1 dimensi yaitu garis itu sendiri
3. persegi dan bangun datar lainnya adalah 2 dimensi yaitu panjang dan lebar
4. bangun ruang adalah 3 dimensi yaitu panjang lebar tinggi
5. tidak ada bangun geometri 4 dimensi

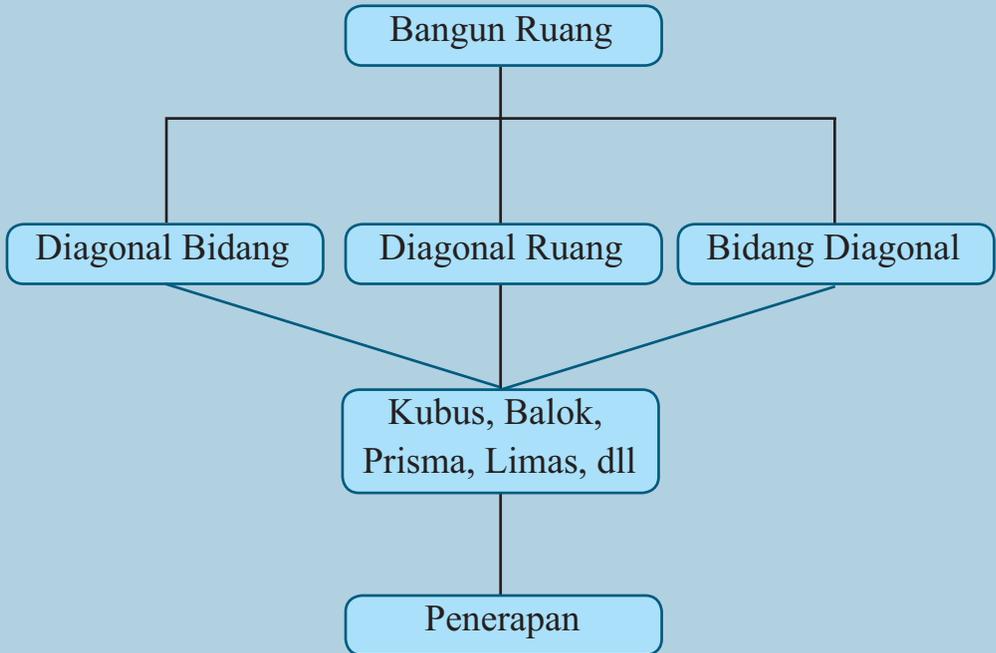
Dalam bukunya " *The Element* ", ia menyatakan 5 *postulat* yang menjadi landasan dari semua teorema yang ditemukannya. Semua *postulat* dan teorema yang beliau ungkapkan merupakan landasan teori tentang kedudukan titik, garis, dan bidang dalam ruang yang hingga kini masih digunakan dengan hampir tanpa perubahan yang prinsipil. **Euclid** menulis 13 jilid buku tentang geometri. Dalam buku-bukunya ia menyatakan *aksioma* (pernyataan-pernyataan sederhana) dan membangun semua dalil tentang geometri berdasarkan aksioma-aksioma tersebut. Contoh dari aksioma **Euclid** adalah, "***Ada satu dan hanya satu garis lurus, di mana garis lurus tersebut melewati dua titik***". Buku-buku karangannya menjadi hasil karya yang sangat penting dan menjadi acuan dalam pembelajaran Ilmu Geometri. Bagi **Euclid**, matematika itu penting sebagai bahan studi dan bukan sekedar alat untuk mencari nafkah. Ketika ia memberi kuliah geometri pada seorang raja, baginda bertanya, "Tak adakah cara yang lebih mudah bagi saya untuk mengerti dalam mempelajari geometri?". Euclid menjawab, "Bagi raja tak ada jalan yang mudah untuk mengerti geometri. Setiap orang harus berpikir ke depan tentang dirinya apabila ia sedang belajar".

Sumber : Hosch, W.L. 2011. The Britannica Guide to Geometry. New York : Britannica Educational Publishing

Beberapa hikmah yang mungkin bisa kita petik, adalah :

1. Ilmu bukanlah sekedar alat untuk mencari nafkah dalam memenuhi kebutuhan hidup, tetapi untuk mencari nafkah seseorang harus mempunyai ilmu
2. Jalan pintas bukanlah suatu hal yang baik untuk seseorang yang memang

Peta Konsep

Bangun Ruang
Diagonal Bidang
Diagonal Ruang
Bidang Diagonal
Kubus, Balok,
Prisma, Limas, dll
Penerapan

Subbab 4.1 Diagonal Bidang dan Diagonal Ruang

Amatilah benda-benda di sekitar Anda. Dalam kehidupan sehari-hari mungkin Anda sering menjumpai kardus minuman, kardus mie instan, kotak makanan, kaleng susu dan lain-lain. Berbentuk apakah benda-benda tersebut?

Sekarang, cermatilah beberapa contoh berikut.

Contoh 4.1

Intan ingin membungkus kado yang berbentuk balok. Ia akan menambahkan pita yang dibentuk menyilang diantara ujung-ujung permukaan kado tersebut. Jika panjang balok adalah 40 cm dan lebarnya adalah 30 cm, berapakah panjang minimal pita yang dibutuhkan oleh Intan?

Contoh 4.2

Budi akan menghias suatu ruangan yang berbentuk kubus untuk acara ulang tahun seorang temannya. Ia menghias ruangan tersebut dengan pita dan balon. Ia ingin memasang pita melintang melalui ruangan dari pojok atas sampai pojok bawah ruangan. Jika ruangan tersebut berukuran 3 m × 3 m × 3 m, berapakah panjang pita yang diperlukan untuk menghias ruangan tersebut?

Contoh 4.3

Pak Ujang sedang membuat kandang untuk marmut hewan peliharaannya. Ia membuat kandang berbentuk balok, tetapi kandang tersebut akan ia bagi menjadi dua bagian berbentuk prisma segitiga yang volume dan luasnya sama. Oleh karena itu, ia membuat pembatas ruangan dengan kayu triplek. Jika kandang tersebut berukuran 60 cm × 30 cm × 30 cm, berapakah ukuran kayu triplek tersebut?

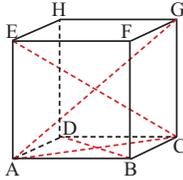
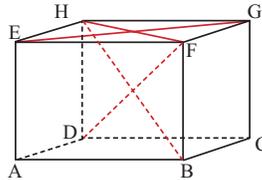
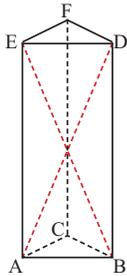
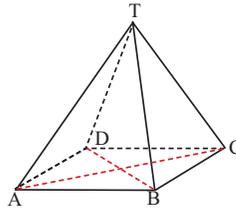
Agar bisa menjawab masalah-masalah di atas, Anda perlu mempelajari materi pada bab ini. Sebelum mempelajari materi pada bab ini, Anda harus mengetahui tentang macam - macam bangun ruang serta teorema Pythagoras. Sebutkan macam-macam bangun ruang yang Anda ketahui dan sebutkan rumus Pythagoras.

Kegiatan Sebelum Pembelajaran

1. Ingatkan kembali macam-macam bangun ruang yang sudah didapatkan siswa di SD atau SMP.
2. Ajak siswa untuk mendiskusikan sejenak Contoh 4.1, Contoh 4.2, dan Contoh 4.3 (tidak harus terselesaikan).

Kegiatan 4.1.1 Diagonal Bidang dan Diagonal Ruang

Ayo Mengamati

Amati gambar-gambar berikut ini.

Gambar 4.1.1.1

Gambar 4.1.1.2

Gambar 4.1.1.3

Gambar 4.1.1.4

Perhatikan Gambar 4.1.1.1 di atas, ruas garis *AC* dan *BD* disebut diagonal bidang. Sedangkan *AG* dan *EC* disebut diagonal ruang. Pada Gambar 4.1.1.2, contoh diagonal bidangnya adalah *EG* dan *FH*. Sedangkan contoh diagonal ruangnya adalah *HB* dan *FD*. Pada Gambar 4.1.1.3, *AD* dan *BE* disebut dengan diagonal bidang tegak prisma. Sedangkan pada Gambar 4.1.1.4, *AC* dan *BD* disebut dengan diagonal bidang alas limas. Amati bidang yang memuat ruas garis-ruas garis tersebut.

Ayo Mengamati

Ajak siswa untuk mengamati Gambar 4.1.1.1, Gambar 4.1.1.2, Gambar 4.1.1.3, dan Gambar 4.1.1.4 serta mengamati ruas garis yang merupakan contoh diagonal bidang dan diagonal ruang.

Minta siswa untuk menyebutkan diagonal bidang dan diagonal ruang yang lain pada bangun ruang tersebut

Minta siswa untuk membuat pertanyaan dari hasil mengamati.

Nah, berdasarkan informasi di atas, buatlah pertanyaan tentang diagonal bidang dan diagonal ruang pada tempat yang disediakan berikut. Usahakan pertanyaan Anda memuat kata-kata " garis ", "titik sudut" , "bidang", "sama" dan "berlainan".

Dari sekian banyak pertanyaan yang Anda buat, mungkin ada diantaranya pertanyaan-pertanyaan berikut.

1. Apa yang dimaksud dengan diagonal bidang?
2. Apakah diagonal bidang selalu menghubungkan titik-titik sudut yang terletak pada bidang yang sama dan tidak merupakan rusuk bidang?
3. Apakah semua bangun ruang mempunyai diagonal bidang?
4. Apakah yang dimaksud dengan diagonal ruang?
5. Apakah diagonal ruang selalu menghubungkan titik-titik sudut yang terletak pada bidang yang berlainan?
6. Apakah semua bangun ruang mempunyai diagonal ruang?

Ajak siswa untuk menggali informasi yang disajikan dalam kegiatan Ayo, Menggali Informasi. Informasi yang diinginkan digali adalah pengertian diagonal bidang dan diagonal ruang serta keberadaannya pada bangun ruang.

Untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan tersebut, isilah tabel berikut ini.

No	Bangun Ruang	Diagonal Bidang	Diagonal Ruang
1	Balok ABCD.EFGH (titik sudut: A, B, C, D, E, F, G, H)		
2	Balok KLMN.OPQR (titik sudut: K, L, M, N, O, P, Q, R)		
3	Balok ABCD.EFGH (titik sudut: A, B, C, D, E, F, G, H)		
4	Prisma ABCD.EFGH (titik sudut: A, B, C, D, E, F, G, H)		

Minta siswa untuk mengisi tabel pada kegiatan Ayo, Menalar. Tujuannya adalah siswa dapat menentukan diagonal bidang dan diagonal ruang pada berbagai macam bangun ruang yang diberikan.

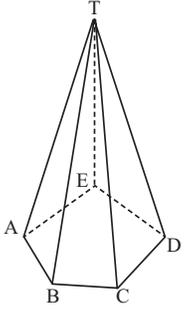
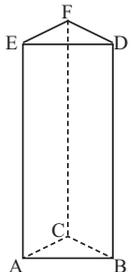
Ajak siswa untuk lebih cermat dalam menentukan diagonal bidang dan diagonal ruang pada bangun ruang yang diberikan di tabel, karena tidak semua bangun ruang mempunyai diagonal bidang atau diagonal ruang.

Alternatif Penyelesaian Ayo Menalar

No.	Diagonal Bidang	Diagonal Ruang
1	*AF, BE, AC, BD, BG, CF, DG, CH, DE, AH, EG, FH*	*AG, EC, HB, FD*
2	*KP, LO, LQ, MP, KM, LN, MR, NQ, NO, KR, OQ, PR*	*KQ, NP, LR, MO*
3	*AF, BE, BG, CF, BD, AC, DG, CH, AH, DE, EG, FH*	*AG, HB, EC, DF*
4	*AF, BE, BG, CF, CH, DG, BD, CA, FH, GE, AH, DE*	*AG, HB, EC, DF*

No	Bangun Ruang	Diagonal Bidang	Diagonal Ruang
5			
6			
7			

No.	Diagonal Bidang	Diagonal Ruang
5	*AH, BG, BI, CH, CJ, DI, DK, EJ, EL, FK, AL, FG, BE, CF, AD, HK, IL, GJ*	*GD, GE, GC, HE, HD, HF, IE, IF, IA, JF,JA, JB, KA, KB, KC, LB, LC, LD*
6	*PS, QT, PR, UX, VY, UW, PY, UT, PV, QU, QW, RV, RX, SW, SY, TX*	*UR, US, VS, VT, WT, WP, XP, XQ, YQ, YR*
7	*AC, BD*	Tidak Ada
8	*AC, BD, CE, BE, AD*	Tidak Ada
9	*AD, BE, BF, CD, EC, AF*	Tidak Ada

No	Bangun Ruang	Diagonal Bidang	Diagonal Ruang
8	T, E, A, D, B, C		
9	F, E, D, C, A, B		

Dari tabel di atas, adakah bangun ruang yang tidak mempunyai diagonal bidang? Adakah bangun ruang yang tidak mempunyai diagonal ruang? Jika ada, maka sebutkanlah bangun ruang-bangun ruang tersebut pada tempat yang sudah disediakan berikut ini.

Minta siswa untuk menuliskan bangun ruang mana saja pada tabel yang tidak mempunyai diagonal bidang atau diagonal ruang.

Ajak siswa untuk memikirkan bangun ruang lain selain pada tabel yang tidak memiliki diagonal bidang dan diagonal ruang. Minta siswa untuk menuliskan atau menggambarkannya pada tempat yang telah disediakan.

Alternatif Jawaban

tabung, bola

Berdasarkan kegiatan **Ayo Menalar** minta siswa untuk membuat pengertian diagonal bidang dan diagonal ruang.

Selanjutnya, menurut Anda adakah bangun ruang yang tidak memiliki diagonal bidang dan diagonal ruang? Jika ada maka sebutkanlah bangun ruang tersebut pada tempat berikut ini.

Dari proses menalar tersebut, tuliskan simpulan-simpulan awal atau dugaan awal tentang *apa itu diagonal bidang dan diagonal ruang*?

Tukarkan tulisan simpulan-simpulan awal tersebut dengan teman sebangku/ kelompok lainnya. Secara santun, silahkan saling berkomentar, menanggapi komentar, memberikan usul dan menyepakati ide-ide yang paling tepat.

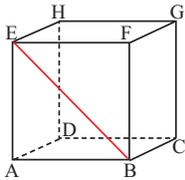
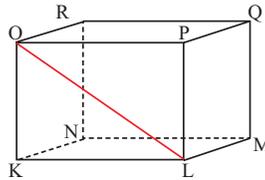
Perhatikan gambar-gambar berikut ini.

Alternatif Jawaban Definisi yang diinginkan

diagonal bidang :

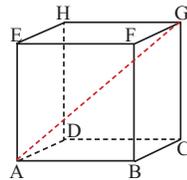
ruas garis yang menghubungkan dua titik sudut *(bidang)* yang berhadapan pada setiap bidang dan tidak merupakan rusuk bidang.

diagonal ruang :

ruas garis yang menghubungkan dua titik sudut yang berhadapan dalam suatu ruang.

Gambar 4.1.1.5

Gambar 4.1.1.6

Pada Gambar 4.1.1.5 di atas, ruas garis *BE* adalah salah satu diagonal bidang pada kubus *ABCD.EFGH*. Sedangkan pada Gambar 4.1.1.6, ruas garis *LO* adalah salah satu diagonal bidang balok *KLMN.OPQR*. Perhatikan bidang *ABFE* pada Gambar 4.1.1.5 dan bidang *KLPO* pada Gambar 4.1.1.6. Bidang *ABFE* berbentuk persegi dan siku-sikunya berada di titik *A, B, F*, dan *E*. Sedangkan bidang *KLPO* berbentuk persegi panjang dan siku-sikunya berada di titik *K, L, P*, dan *O*. Sekarang perhatikan segitiga *BAE* pada bidang *ABFE*, dan segitiga *KLO* pada bidang *KLPO*. Jika panjang rusuk *BA* atau *AE*, *KL* dan *KO* diketahui, dapatkah Anda menentukan panjang *BE* dan *LO*?

Untuk dapat menentukan panjang *BE* dan *LO* Anda harus tahu tentang teorema Pythagoras. Gunakanlah teorema Pythagoras untuk menentukan panjang *BE* dan *LO*. Tuliskanlah pada tempat berikut ini.

Sekarang perhatikan gambar berikut ini.

Gambar 4.1.1.7

Ayo Mengamati

Ajak siswa untuk mengamati salah satu diagonal bidang pada Gambar 4.1.1.5 dan Gambar 4.1.1.6., minta siswa untuk mendiskusikan cara untuk menentukan panjang diagonal bidang tersebut menggunakan teorema Pythagoras.

Alternatif Penyelesaian Gambar 4.1.1.5

$BE^2 = AB^2 + AE^2$

Alternatif Penyelesaian Gambar 4.1.1.6

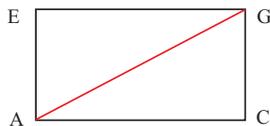
$LO^2 = KL^2 + KO^2$

Ajak siswa untuk mengamati salah satu diagonal ruang pada Gambar 4.1.1.7 kemudian minta siswa untuk mendiskusikan cara menentukan panjang diagonal ruang tersebut menggunakan teorema Pythagoras.

$AG^2 = AC^2 + CG^2$

$AG^2 = AB^2 + BC^2 + CG^2$

Pada Gambar 4.1.1.7 di atas, jika panjang rusuk AB atau BC diketahui, Anda dapat menentukan panjang diagonal ruang AG. Untuk dapat menentukan panjang diagonal tersebut, perhatikan uraian berikut ini.

Diagonal ruang AG merupakan diagonal ruang yang terletak pada bidang $ACGE$. Jika bidang tersebut digambarkan ulang akan diperoleh gambar berikut ini.

Gambar 4.1.1.8

Nyatakan AC dalam AG dan GC. Anda tentu telah mengetahui cara untuk menentukan panjang AC pada kubus tersebut. Perhatikan persegi panjang $ACGE$ di atas, salah satu siku-sikunya adalah di C. Pada segitiga ACG, gunakan kembali teorema Pythagoras untuk menentukan panjang AG. Tuliskanlah bagaimana menentukan panjang AG pada tempat berikut ini.

Apa yang telah Anda kerjakan merupakan cara untuk menentukan panjang diagonal bidang dan diagonal ruang pada kubus, bagaimana untuk menentukan panjang diagonal bidang dan diagonal ruang pada bangun ruang yang lain? Dapatkah Anda menentukannya?

Berdasarkan pengamatan di atas, buatlah pertanyaan yang memuat kata-kata " panjang " , "diagonal bidang", dan "diagonal ruang" di tempat yang telah disediakan.

Ayo Menanya

Minta siswa untuk membuat pertanyaan dari hasil mengamati

Diantara pertanyaan-pertanyaan tersebut, mungkin ada pertanyaan-pertanyaan berikut ini.

1. Bagaimana cara menentukan panjang diagonal bidang dan diagonal ruang pada kubus?
2. Bagaimana cara menentukan panjang diagonal bidang dan diagonal ruang pada balok?
3. Bagaimana cara menentukan panjang diagonal bidang dan diagonal ruang pada prisma?
4. Bagaimana cara menentukan panjang diagonal bidang alas pada limas?

Untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan tersebut, lengkapilah tabel berikut ini.

Bangun Ruang	Panjang BE	Panjang AG
Kubus ABCD.EFGH (H, G, E, F, D, C, A, B; 3 cm)		
Kubus ABCD.EFGH (H, G, E, F, D, C, A, B; 4 cm)		

Bangun Ruang	Panjang BE	Panjang AG
Kubus ABCD.EFGH (H, G, E, F, D, C, A, B; 3 cm)	$3\sqrt{2}$ cm	$3\sqrt{3}$ cm
Kubus ABCD.EFGH (H, G, E, F, D, C, A, B; 4 cm)	$4\sqrt{2}$ cm	$4\sqrt{3}$ cm

Ajak siswa untuk menggali informasi tentang penentuan panjang diagonal bidang dan diagonal ruang pada berbagai macam bangun ruang melalui pertanyaan-pertanyaan yang mereka buat.

Untuk menjawab pertanyaan – pertanyaan yang dibuat oleh siswa, mintalah mereka untuk mengisi tabel pada kegiatan Ayo, Menalar sehingga mereka dapat membuat kesimpulan tentang cara penentuan panjang diagonal bidang dan diagonal ruang pada suatu bangun ruang. Jika memungkinkan berilah soal-soal tambahan berupa macam bangun ruang lain yang tidak terdapat pada tabel.

Bimbing siswa untuk dapat menemukan dan menuliskan cara menentukan panjang diagonal bidang dan diagonal ruang pada berbagai macam bangun ruang.

Minta siswa untuk mendiskusikan cara menetukan diagonal bidang dan diagonal ruang yang telah mereka tulis dengan teman sebangkunya. Latih siswa untuk menanggapi pertanyaan yang mungkin diajukan oleh temannya.

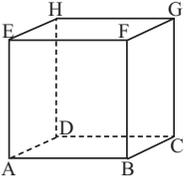
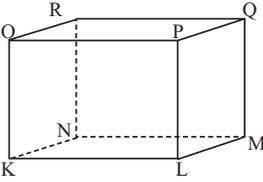
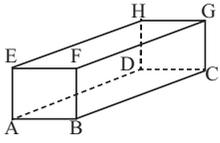
Bangun Ruang	Panjang BE	Panjang AG
Kubus ABCD.EFGH, AB = 5 cm		
Balok ABCD.EFGH, AB = 4 cm, AE = 3 cm		
Balok, DA = 8 cm, AB = 4 cm, tinggi 6 cm		

Kemudian jelaskan cara menentukan panjang diagonal bidang dan diagonal ruang pada suatu bangun ruang di tempat yang disediakan berikut.

Diskusikan cara menentukan panjang diagonal bidang dan diagonal ruang tersebut pada teman sebangku Anda.

Bangun Ruang	Panjang BE	Panjang AG
Kubus ABCD.EFGH, AB = 5 cm	$5\sqrt{2}\ cm$	$5\sqrt{3}\ cm$
Balok ABCD.EFGH, AB = 4 cm, AE = 3 cm	$5\ cm$	$\sqrt{29}\ cm$
Balok, DA = 8 cm, AB = 4 cm, tinggi 6 cm	$\sqrt{42}\ cm$	$\sqrt{116}\ cm$

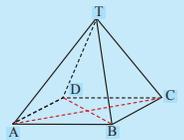
1. Isilah tabel berikut ini dengan tanda centang (√)

Bangun Ruang	Diagonal Bidang		Diagonal Ruang	
	Ada	Tidak ada	Ada	Tidak ada
Balok ABCD.EFGH				
Balok KLMN.OPQR				
Balok ABCD.EFGH				

Alternatif Penyelesaian Latihan 4.1.1

1.

Bangun Ruang	Diagonal Bidang	Diagonal Ruang
Balok ABCD.EFGH	ada	ada
Balok KLMN.OPQR	ada	ada
Balok ABCD.EFGH	ada	ada

Bangun Ruang	Diagonal Bidang		Diagonal Ruang	
	Ada	Tidak ada	Ada	Tidak ada

Bangun Ruang	Diagonal Bidang	Diagonal Ruang
	Ada	Ada
	Ada	Tidak Ada
	Ada	Tidak Ada
	Ada	Ada

Bangun Ruang	Diagonal Bidang		Diagonal Ruang	
	Ada	Tidak ada	Ada	Tidak ada
Prisma ABCD.EFGH (E, H, F, G, A, D, B, C)				
Prisma ABCD.EFGH (H, G, D, C, E, F, A, B)				
Prisma ABCD.EFGH (H, G, E, F, D, C, A, B)				
Tabung				

Bangun Ruang	Diagonal Bidang	Diagonal Ruang
Prisma ABCD.EFGH (E, H, F, G, A, D, B, C)	Ada	Ada
Prisma ABCD.EFGH (H, G, D, C, E, F, A, B)	Ada	Ada

Bangun Ruang	Diagonal Bidang	Diagonal Ruang
Prisma ABCD.EFGH (H, G, E, F, D, C, A, B)	Ada	Ada
Tabung	Tidak Ada	Tidak Ada

2. Perhatikan bangun berikut ini.

Gambar 1

Gambar 2

   a. Pada Gambar 1, jika diketahui panjang $AB = BC = CG = 4$ cm, $JK = 3$ cm, dan $BJ = 1$ cm hitunglah panjang AC, AK, dan LG.

   b. Pada Gambar 2, jika diketahui panjang $AB = 5$ cm, $AE = BC = EF = 4$ cm hitunglah panjang AC, EG, DF, dan AG.

3. Perhatikan aquarium berikut ini.

Sumber: Big Ideas Math Advanced 1

Pada akuarium tersebut akan ditambahi hiasan yang digantungkan pada kawat yang dipasang di dalam aquarium melintang dari ujung atas ke ujung bawah. Tentukan panjang kawat yang diperlukan!

Alternatif Penyelesaian Latihan 4.1.1

2. a. $AC = 4\sqrt{2}$ cm

   $AK = \sqrt{26}$ cm

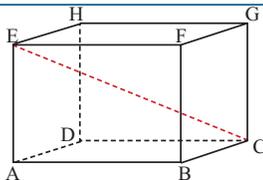
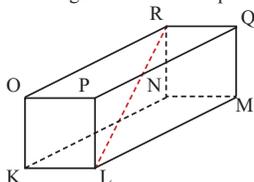
   $LG = \sqrt{26}$ cm

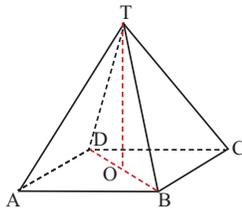
   b. $AC = \sqrt{41}$ cm

   $EG = 4\sqrt{2}$ cm

   $DF = AG = 4\sqrt{3}$ cm

3. Panjang kawat = $\sqrt{58,25} \approx$ 7,63 ft

4. Dari gambar di samping, jika diketahui panjang $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm dan $EC = 5\sqrt{5}$ berapakah luas segitiga AEC dan ABC?

5. Ani akan membuat kerangka suatu balok seperti gambar berikut.

Jika panjang $KL = 5$ cm, $LM = 10$ cm, dan $LR = 5\sqrt{6}$ cm, maka berapa kawat yang dibutuhkan Ani untuk membuat kerangka balok tersebut?

6. Diketahui limas $T.ABCD$ dengan alas berbentuk persegi seperti berikut.

Panjang $BD = 12\sqrt{2}$ cm dan $TO = 8$ cm. Tentukan

a. Luas segitiga TBC

b. Volume limas $T.ABCD$

7. Suatu kepanitian membuat papan nama dari kertas yang membentuk

Alternatif Penyelesaian Latihan 4.1.1

4. Luas $AEC = 25$ cm^2

   Luas $ABC = 24$ cm^2

5. Panjang kawat yang dibutuhkan Ani = 80 cm

6. a. Luas $TBC = 60$ cm^2

   b. Volume $T.ABCD = 384$ cm^3

Alternatif Penyelesaian
Latihan 4.1.1

7. Ukuran kertas
   = 12 cm × 15 cm

   Petunjuk:

   Gambarlah kertas yang terbentuk jika bangun tersebut dibuka sehingga membentuk persegi panjang. Karena *ABE* segitiga sama sisi maka panjang *BE* = *EA* = *AB*.

8. rusuk terpanjang
   = 20 cm

9. a. panjang diagonal bidang = $7\sqrt{2}$ cm
   b. panjang diagonal ruang = $7\sqrt{3}$ cm
   c. Volume kubus = 343 cm^3

bangun seperti berikut.

Ternyata *ABE* membentuk segitiga sama sisi, panjang *BF* = 13 cm dan *BC* = 12 cm. Berapakah ukuran kertas yang digunakan untuk membuat papan nama tersebut?

8. Balok dengan panjang diagonal ruang $20\sqrt{2}$ cm. Rusuk-rusuk balok tersebut bertemu pada suatu titik sudut dengan perbandingan 3 : 4 : 5. Berapa rusuk terpanjang dari balok tersebut?

9. Luas permukaan suatu kubus adalah 294 cm^2. Tentukan
   a. Panjang diagonal bidangnya
   b. Panjang diagonal ruangnya
   c. Volume kubus

10. Tentukan banyaknya diagonal bidang dan diagonal ruang pada bangun ruang berikut.
    a. Prisma segilima
    b. Prisma segidelapan

11. Suatu kubus panjang diagonal ruangnya adalah *a* cm. tentukan:
    a. Panjang rusuk kubus tersebut
    b. Panjang diagonal bidang kubus tersebut

10.a. Banyaknya diagonal bidang = 20

   Banyaknya diagonal ruang = 10

   b. Banyaknya diagonal bidang = 36

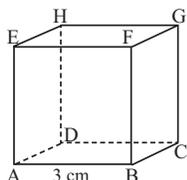
   Banyaknya diagonal ruang = 45

11.a. Panjang rusuk = $\frac{1}{3}\sqrt{3}\ a$

   b. Panjang diagonal bidang = $\frac{1}{3}\sqrt{6}\ a$

Kegiatan 4.1.2 Sifat-sifat Diagonal Bidang dan Diagonal Ruang

Dari kegiatan sebelumnya Anda sudah mengenal dan dapat menentukan diagonal bidang dan diagonal ruang pada suatu bangun ruang. Sekarang mulailah memperhatikan diagonal bidang dan diagonal ruang dari masing-masing bangun ruang tersebut.

Perhatikan kubus *ABCD.EFGH* berikut ini

Anda tentu dapat menyebutkan semua diagonal bidang dan diagonal ruang pada kubus tersebut. Tuliskanlah semua diagonal bidang dan diagonal ruang tersebut pada tempat berikut ini.

Kemudian tentukan panjang tiap-tiap diagonal bidang dan diagonal ruang yang Anda sebutkan tadi.

Minta siswa untuk menentukan panjang masing-masing diagonal bidang dan diagonal ruang yang mereka tuliskan sebelumnya.

Alternatif Penyelesaian

Panjang diagonal bidang pada kubus *ABCD.EFGH* :
$AF = BE = BG = CF = CH = DG = DE = AH = AC = BD = HF = GE = 3\sqrt{2}$ cm

Panjang diagonal ruang pada kubus *ABCD.EFGH* :
$AG = HB = EC = DF = 3\sqrt{3}$ cm

Selanjutnya minta mereka untuk mengisi tabel yang terdapat pada kegiatan selanjutnya. Jika memungkinkan minta mereka mendiskusikan dengan teman sebangkunya.

Kegiatan Sebelum Pembelajaran

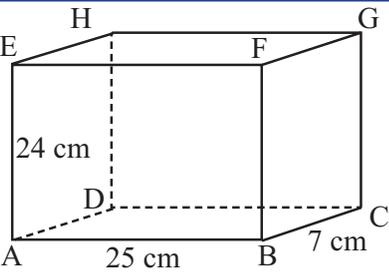
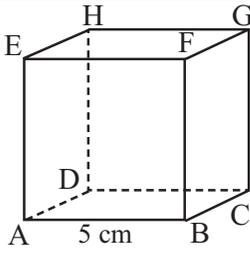
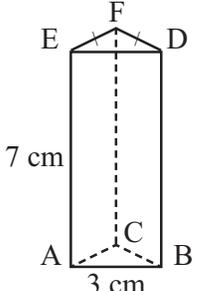
1. Ingatkan kembali siswa terhadap materi diagonal bidang dan diagonal ruang serta menentukan panjangnya.
2. Berikan beberapa contoh bangun ruang dan minta siswa untuk menentukan diagonal bidang dan diagonal ruangnya.
3. Minta siswa untuk memperhatikan diagonal bidang atau diagonal ruang satu dengan yang lain yang terdapat pada bangun ruang yang sama.

Ajak siswa untuk memperhatikan gambar kubus pada kegiatan Ayo, Mengamati. Minta mereka untuk menyebutkan semua diagonal bidang dan diagonal ruang yang terdapat pada kubus tersebut, yaitu

Diagonal bidang : *AF, BE, BG, CF, CH, DG, DE, AH, AC, BD, HF, GE.*

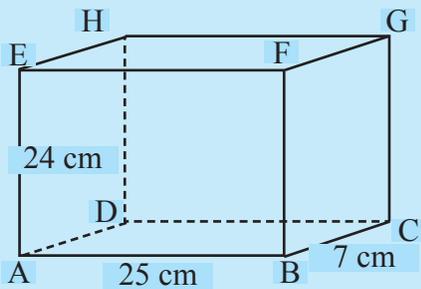
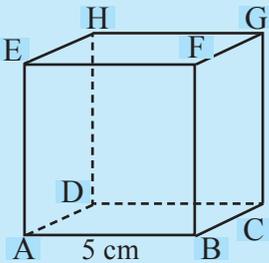
Diagonal ruang : *AG, HB, EC, DF*

Lakukan hal yang sama untuk bangun ruang-bangun ruang berikut ini.

Bangun Ruang	Diagonal Bidang	Panjang Diagonal Bidang	Diagonal ruang	Panjang Diagonal ruang
Balok ABCD.EFGH: AB = 25 cm, BC = 7 cm, AE = 24 cm				
Kubus ABCD.EFGH: AB = 5 cm				
Prisma segitiga ABC.DEF: AB = 3 cm, tinggi 7 cm				

Dari hasil pengisian tabel di atas, pada tiap-tiap bangun ruang adakah diagonal bidang yang mempunyai panjang sama dengan diagonal bidang yang lain? Adakah diagonal ruang yang mempunyai panjang sama dengan diagonal ruang yang lain? Jika ada, sebutkanlah pada tempat berikut ini.

Hal itulah yang disebut sifat-sifat diagonal bidang dan diagonal ruang.

Alternatif Penyelesaian **di Halaman berikut**

Alternatif Penyelesaian **Tabel**

Bangun Ruang	Diagonal Bidang	Panjang Diagonal Bidang	Diagonal ruang	Panjang Diagonal ruang
H G E F 24 cm D C A 25 cm B 7 cm	AF	$\sqrt{1.201}$ cm	AG	$25\sqrt{2}$ cm
	BE	$\sqrt{1.201}$ cm		
	BG	$\sqrt{1.201}$ cm		
	CF	$\sqrt{1.201}$ cm	EC	$25\sqrt{2}$ cm
	CH	$\sqrt{1.201}$ cm		
	DG	$\sqrt{1.201}$ cm		
	DE	$\sqrt{1.201}$ cm	DF	$25\sqrt{2}$ cm
	AH	$\sqrt{1.201}$ cm		
	AC	$\sqrt{1.201}$ cm		
	BD	$\sqrt{1.201}$ cm	HB	$25\sqrt{2}$ cm
	EG	$\sqrt{1.201}$ cm		
	FH	$\sqrt{1.201}$ cm		
H G E F D C A 5 cm B	AF	$5\sqrt{2}$ cm	AG	$5\sqrt{3}$ cm
	BE	$5\sqrt{2}$ cm		
	BG	$5\sqrt{2}$ cm		
	CF	$5\sqrt{2}$ cm	EC	$5\sqrt{3}$ cm
	CH	$5\sqrt{2}$ cm		
	DG	$5\sqrt{2}$ cm		
	DE	$5\sqrt{2}$ cm	DF	$5\sqrt{3}$ cm
	AH	$5\sqrt{2}$ cm		
	AC	$5\sqrt{2}$ cm		
	BD	$5\sqrt{2}$ cm	HB	$5\sqrt{3}$ cm
	EG	$5\sqrt{2}$ cm		
	FH	$5\sqrt{2}$ cm		

Bangun Ruang	Diagonal Bidang	Panjang Diagonal Bidang	Diagonal ruang	Panjang Diagonal ruang
F, E, D, 7 cm, C, A, B, 3 cm	AD	$\sqrt{58}$ cm	Tidak Ada	Tidak Ada
	BE	$\sqrt{58}$ cm		
	BF	$\sqrt{58}$ cm		
	CD	$\sqrt{58}$ cm		
	AF	$\sqrt{58}$ cm		
	CE	$\sqrt{58}$ cm		

Setelah mengisi tabel, minta siswa untuk menjawab pertanyaan berikutnya kemudian menuliskannya pada tempat yang disediakan.

Alternatif jawaban Buku Siswa Halaman 178 :

- Pada balok $ABCD.EFGH$
  diagonal bidang $AF = BE = CH = DG$
  diagonal bidang $BG = CF = DE = AH$
  diagonal bidang $AC = BD = EG = FH$
  diagonal ruang $AG = EC = DF = HB$

- Pada kubus $ABCD.EFGH$
  diagonal bidang
  $AF = BE = CH = DG = BG = CF = DE = AH = AC = BD = EG = FH$
  diagonal ruang $AG = EC = DF = HB$

- Pada prisma $ABC.DEF$, diagonal $AD = BE = BF = CD = AF = CE$

Nah, berdasarkan informasi di atas, buatlah pertanyaan tentang sifat-sifat diagonal bidang dan diagonal ruang. Tuliskan pertanyaanmu di tempat berikut ini.

Dari sekian banyak pertanyaan yang Anda buat, mungkin ada diantaranya pertanyaan-pertanyaan berikut:

1. Apa saja sifat diagonal bidang dan diagonal ruang pada kubus?
2. Apa saja sifat diagonal bidang dan diagonal ruang pada balok?
3. Apa saja sifat diagonal bidang dan diagonal ruang pada prisma?
4. Apa saja sifat diagonal bidang alas pada limas?

Ayo Menalar

Untuk dapat menjawab pertanyaan-pertanyaan di atas, telitilah bangun ruang-bangun ruang yang sudah Anda ketahui. Gambarkan bangun ruang yang Anda ketahui, tentukan ukuran bangun ruang tersebut, kemudian tentukan panjang semua diagonal bidang dan diagonal ruangnya (jika ada). Setelah itu buatlah kesimpulan mengenai sifat-sifat diagonal bidang dan diagonal ruang untuk tiap-tiap bangun ruang tersebut. Lakukan kegiatan-kegiatan tersebut pada tempat yang telah disediakan berikut ini.

Minta siswa untuk membuat pertanyaan yang berkaitan dengan sifat-sifat diagonal bidang dan diagonal ruang.

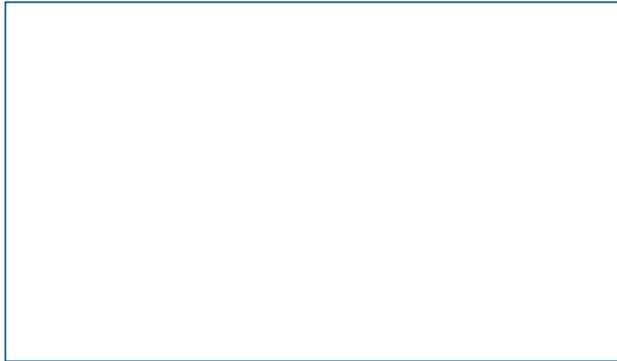
Contoh:

1. Apa saja sifat-sifat diagonal bidang?
2. Apa saja sifat-sifat diagonal ruang?
3. Apakah sifat – sifat diagonal bidang dan diagonal ruang kubus sama dengan balok?

Ajak siswa untuk menggali keingintahuan mereka tentang sifat-sifat diagonal bidang dan diagonal ruang untuk masing-masing jenis bangun ruang.

Minta siswa untuk memikirkan bangun ruang yang mereka ketahui dan minta siswa untuk menggambarkan bangun ruang yang mereka pikirkan tersebut. Bimbing siswa untuk menentukan ukurannya, menentukan semua diagonal bidang dan diagonal ruangnya serta menentukan panjang masing-masing diagonal bidang dan diagonal ruang tersebut. Setelah itu bimbing siswa untuk membandingkan panjang diagonal bidang atau diagonal ruang yang terdapat pada bangun ruang yang sama. Secara pelan-pelan tuntun siswa untuk menemukan kesimpulan mengenai sifat-sifat diagonal bidang dan diagonal ruang pada bangun ruang yang mereka buat.

Bangun Ruang, Ukuran, Panjang Diagonal Bidang dan Panjang Diagnoal Ruang

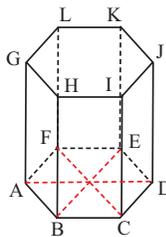
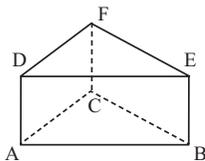
Kesimpulan

Ayo Mengomunikasikan

Presentasikan hasil pekerjaannmu ke depan kelas. Amati juga presentasi teman-teman sekelas Anda, kemudian bandingkan dengan hasil pekerjaan Anda.

Ajak siswa untuk mempresentasikan jawabannya di kelas. Latih siswa untuk menanggapi pertanyaan temannya.

Atur proses presentasi sehingga dapat berjalan dengan baik dan tertib.

Latihan 4.1.2

1. Diketahui limas segienam beraturan seperti berikut.
   Jika panjang diagonal bidang alas BE = 16 cm, dan tinggi prisma DJ = 12 cm tentukan
   a. Panjang AD
   b. Luas $ADEF$
   c. Volume prisma

2. Perhatikan gambar prisma di bawah ini.

   Jika diketahui panjang AE = 17 cm, dan BC = 12 cm serta tinggi prisma = 8 cm tentukan
   a. Panjang BD
   b. Luas ABD
   c. Volume prisma

3. Pada suatu kubus $ABCD.EFGH$ diketahui panjang diagonal ruang AG = $6\sqrt{3}$ cm. Tentukan luas segitiga BDH dan ACE.

4. Lukis prisma trapesium sama kaki $KLMN.OPQR$. Dari gambar yang telah Anda lukis, sebutkan
   a. Diagonal bidang yang sama panjang
   b. Diagonal ruang yang sama panjang

5. Suatu balok memiliki panjang 5 cm, lebar 4 cm, dan volume 60 cm^3. Ukuran balok tersebut diperbesar sehingga panjangnya tiga kali panjang semula, lebarnya dua kali lebar semula, dan tingginya tetap. Bagaimana ukuran diagonal bidang dan diagonal ruang setelah diperbesar.

Alternatif Penyelesaian Latihan 4.1.2

1. a. $AD = BE = 16$ cm
   b. luas $ADEF = 48\sqrt{3}$ cm^2
   c. volume prisma = $1.152\sqrt{3}$ cm^3

   petunjuk: gunakan sifat-sifat pada segienam beraturan

2. a. Panjang $BD = AE = 17$ cm
   b. Luas $ABD = 60$ cm^2
   c. Volume Prisma = 432 cm^3

3. Luas BDH = Luas ACE = $18\sqrt{2}$ cm^2

4.

5. Diagonal bidang setelah ukuran balok diperbesar :

   Diagonal bidang 1 = $\sqrt{289}$ cm
   Diagonal bidang 2 = $\sqrt{234}$ cm
   Diagonal bidang 3 = $\sqrt{73}$ cm

   Diagonal Ruang setelah ukuran balok diperbesar = $\sqrt{298}$ cm

Proyek

Waktu : 7 hari
Materi : Bangun Ruang
Anggota kelompok : 3 orang.

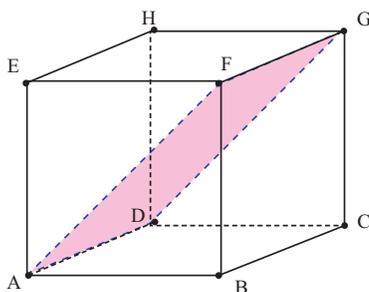
Kegiatan

Buatlah suatu artikel yang berisi tentang aplikasi pengetahuan bangun ruang untuk teknik arsitektur bangunan. Kupaslah pengetahuan tentang apa saja yang berkaitan dengan bangun ruang yang perlu dimiliki oleh seorang arsitektur.

ARTIKEL

Tugas proyek bisa diberikan setelah semua materi pada Bab 4 tersampaikan kepada para siswa. Minta mereka untuk membuat artikel tentang penerapan pengetahuan bangun ruang khususnya diagonal bidang/sisi, diagonal ruang, dan bidang diagonal dalam teknik arsitektur bangunan. Para siswa diperbolehkan untuk mencari literatur lain baik dari buku maupun dari internet.

Subbab 4.2 Bidang Diagonal

Perhatikan kubus *ABCD.EFGH* pada Gambar 4.2.1 secara seksama. Pada gambar tersebut, terlihat dua diagonal pada kubus *ABCD.EFGH* yaitu *AF* dan *DG*. Ternyata, diagonal bidang *AF* dan *DG* beserta dua rusuk kubus yang sejajar, yaitu *AD* dan *FG* yang membentuk suatu bidang di dalam ruang kubus bidang *ADGF* pada kubus *ABCD.EFGH*. Bidang *ADGF* disebut bidang diagonal. Coba Anda sebutkan bidang diagonal yang lain dari kubus *ABCD.EFGH*!

Gambar 4.2.1

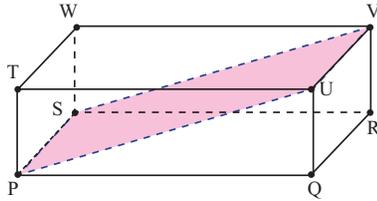
Perhatikan balok *PQRS.TUVW* pada Gambar 4.2.2 secara seksama. Pada gambar tersebut, terlihat dua diagonal pada balok *PQRS.TUVW* yaitu *PU* dan *SV*. Ternyata, diagonal bidang *PU* dan *SV* beserta dua rusuk balok yang sejajar, yaitu *PS* dan *UV* yang membentuk suatu bidang di dalam ruang balok bidang *PUVS* pada balok *PQRS.TUVW*. Bidang *PUVS* disebut bidang diagonal. Coba Anda sebutkan bidang diagonal yang lain dari balok *PQRS.TUVW*!

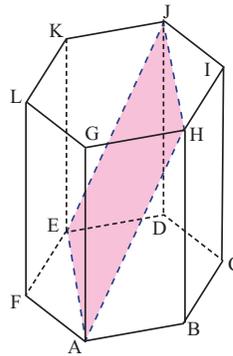
Ajak siswa untuk mengamati gambar bidang diagonal yang terdapat pada kubus (Gambar 1), balok (Gambar 2), dan prisma segienam (Gambar 3)

Siswa diminta untuk mencari bidang diagonal-bidang diagonal yang lain dari kubus, balok, dan prisma segienam

Alternatif Penyelesaian **Ayo Mengamati**

Bidang-bidang diagonal pada kubus:

ACFH, BDEG, ABFE, GHDC, AGFD, BCEH

Gambar 4.2.2

Perhatikan prisma segienam *ABCDEF.GHIJKL* pada Gambar 4.2.3 secara seksama. Pada gambar tersebut, terlihat dua diagonal pada prisma segienam *ABCDEF.GHIJKL* yang sejajar yaitu *AH* dan *EJ*. Kedua diagonal bidang *AH* dan *EJ* beserta dua garis *JH* dan *AE* membentuk suatu bidang di dalam ruang prisma segienam bidang *AEJH* pada prisma segienam *ABCDEF.GHIJKL*. Bidang *BIKF* disebut bidang diagonal prisma segienam. Coba Anda sebutkan bidang diagonal yang lain dari prisma segienam *ABCDEF.GHIJKL*!

Gambar 4.2.3

Alternatif Penyelesaian — Ayo Mengamati

Bidang-bidang diagonal pada balok:

PSVU, QRWT, PQVW, RSTU, QSWU, PRVT

Bidang-bidang diagonal pada prisma segienam:

AEJH, BEKH, CELH, ACJL, BDKG, ADJG, BFKI, CFLI, DFGI

Setelah Anda mencari bidang-bidang diagonal yang terdapat pada bangun ruang kubus, balok, dan prisma segienam beraturan, buatlah pertanyaan-pertanyaan terkait dengan definisi dan sifat-sifat bidang diagonal pada bangun ruang kubus, balok, dan prisma segienam beraturan. Mintalah kepada teman Anda untuk menyebutkan bidang-bidang diagonal pada bangun ruang kubus, balok, dan prisma segienam beraturan yang sudah ditemukan, Apabila sama dengan yang telah Anda temukan, identifikasi sifat-sifatnya. Mintalah bantuan guru untuk mengoreksi jawaban Anda.

Setelah Anda melakukan kegiatan di atas, buatlah pertanyaan terkait bidang diagonal pada bangun ruang dan tuliskan pada kotak di bawah ini!

Dari sekian banyak pertanyaan yang Anda buat, mungkin terdapat beberapa pertanyaan-pertanyaan berikut

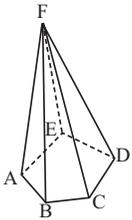
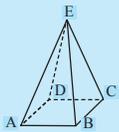
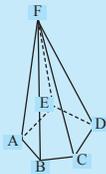
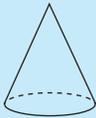
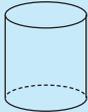
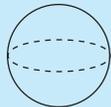
1. Apakah semua bangun ruang memiliki bidang diagonal?
2. Apakah semua bangun ruang prisma memiliki bidang diagonal?

Contoh 4.4

Coba Anda cari bidang-bidang diagonal pada bangun ruang limas segiempat, limas segilima, kerucut, tabung, dan bola. Bandingkan dengan bangun ruang kubus, balok, dan prisma segienam beraturan yang sudah Anda temukan bidang-bidang diagonalnya. Buat kesimpulan tentang bidang diagonal pada masing-masing bangun ruang tersebut.

Minta siswa untuk membuat pertanyaan-pertanyaan dari hasil mengamati

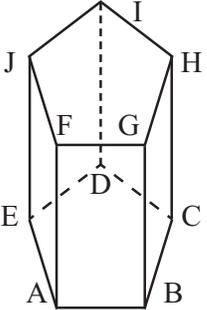
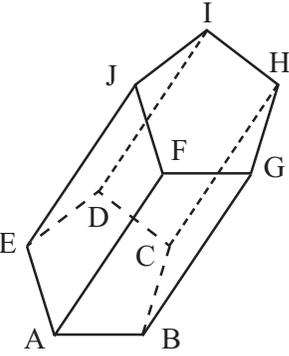
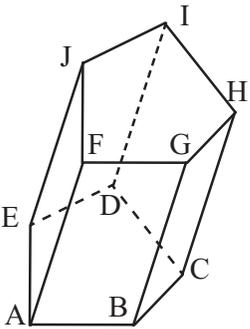
Ajak siswa untuk menggali informasi yang disajikan dari pertanyaan-pertanyaan yang muncul di kegiatan Ayo, Menggali Informasi. Informasi yang diinginkan untuk digali adalah siswa memahami bangun ruang-bangun ruang yang memiliki bidang diagonal

Ajak siswa untuk mengisi tabel yang terdapat pada kegiatan Ayo, Menalar (Contoh 4.4). Tujuannya agar siswa mampu membandingkan bidang diagonal pada bangun ruang dan menentukan bangun ruang-bangun ruang yang memiliki bidang diagonal.

Bangun Ruang	Nama Bangun Ruang	Bidang Diagonal
E, D, C, A, B	Limas Segiempat	
F, E, D, A, B, C	Limas Segilima	
	Kerucut	
	Tabung	
	Bola	

Bangun Ruang	Nama Bangun Ruang	Bidang Diagonal
E, D, C, A, B	Limas Segiempat	*ACE* dan *BDE*
F, E, D, A, B, C	Limas Segilima	*ACF, ADF, BDF, BEF, CEF*

Bangun Ruang	Nama Bangun Ruang	Bidang Diagonal
	Kerucut	Tidak ada
	Tabung	Tidak ada
	Bola	Tidak ada

Tuliskan kesimpulan Anda tentang bidang diagonal untuk masing-masing bangun ruang pada tempat di bawah ini!

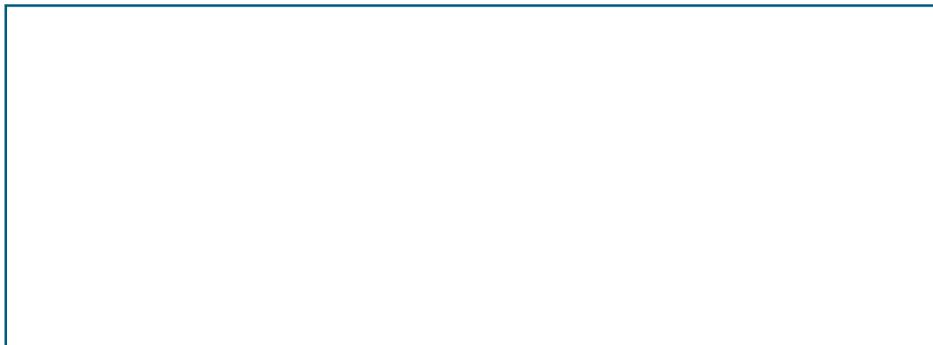
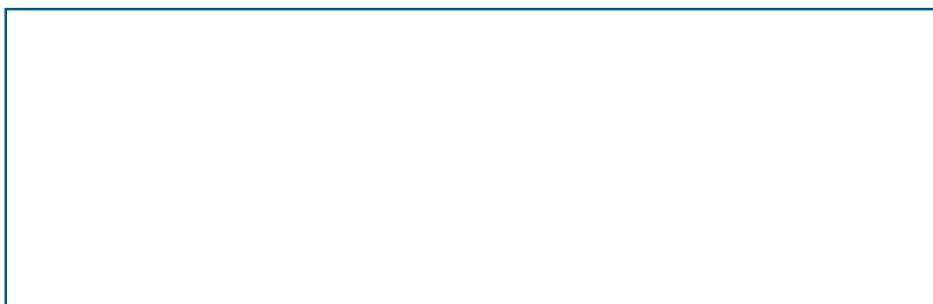
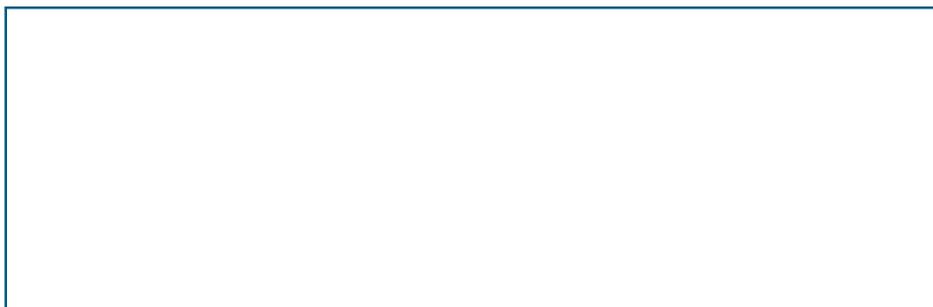
Contoh 4.5

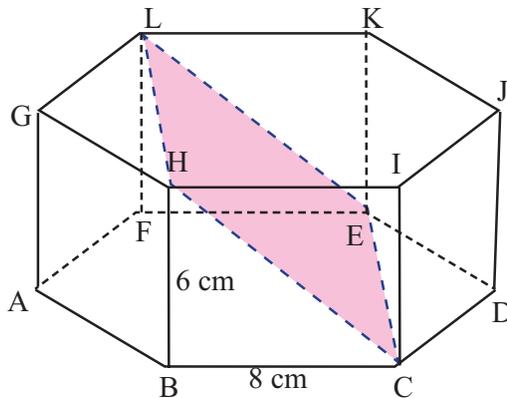
Coba Anda cari bidang-bidang diagonal dari bangun ruang prisma tegak segitiga, prisma tegak segilima tidak beraturan, prisma tegak segilima beraturan, prisma miring segilima beraturan, dan prisma miring segilima tidak beraturan, kemudian cari bidang-bidang diagonalnya. Bandingkan dengan bangun ruang prisma segienam beraturan yang sudah Anda temukan bidang-bidang diagonalnya. Buat kesimpulan bangun ruang prisma yang memiliki bidang diagonal.

Bangun Ruang	Nama Bangun Ruang	Bidang Diagonal
A, B, C, D, E, F	Prisma tegak segitiga	
A, B, C, D, E, F, G, H, I, J	Prisma tegak segilima tidak beraturan	

Ajak siswa untuk mengisi tabel yang terdapat pada kegiatan Ayo, Menalar (Contoh 4.5). Tujuannya agar siswa mampu membandingkan bidang diagonal pada bangun ruang berbentuk prisma segi-n dan menentukan bangun ruang-bangun ruang berbentuk prisma segi-n yang memiliki bidang diagonal.

	Prisma tegak segilima beraturan	
	Prisma miring segilima beraturan	
	Prisma miring segilima tidak beraturan	

Tuliskan kesimpulan Anda tentang bangun ruang prisma yang memiliki bidang diagonal pada tempat di bawah ini!

Setelah Anda mengerjakan tabel di atas, tuliskanlah definisi tentang bidang diagonal pada tempat di bawah ini!

Bagaimana dengan bidang diagonal pada limas segitiga? Gambar dan berikan pendapat Anda!

Selanjutnya, tuliskan sifat-sifat bidang diagonal pada bangun ruang kubus, balok, prisma segi-n beraturan, dan limas segi-n dengan $n > 3$ pada tempat di bawah ini!

Contoh 4.6

Perhatikan gambar prisma segienam di bawah ini. Tentukan luas bidang diagonal *CELH*!

Alternatif Penyelesaian

Sebelum menghitung luas bidang diagonal *CELH*, harus dihitung dahulu panjang diagonal bidang *CH*. Panjang diagonal bidang *CH* dapat dihitung dengan menggunakan Teorema Pythagoras.

$CH^2 = BC^2 + HB^2$

$CH^2 = 8^2 + 6^2$

$CH^2 = 64 + 36$

$CH^2 = 100$

$CH = \sqrt{100}$

$CH = 10$

Jadi, panjang diagonal bidang *CH* adalah 10 cm.

Luas bidang diagonal *CELH* = Luas persegipanjang *CELH*

= panjang x lebar

$= CH \times CE$

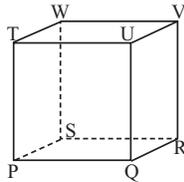
$= 10 \times 8$

$= 80$

Jadi, luas bidang diagonal *CELH* adalah 80 cm^2.

Sajikan jawaban Anda di depan kelas. Diskusikan dengan teman-teman dan guru apabila jawaban Anda tidak sama.

Latihan 4.2

1. Perhatikan gambar kubus di bawah ini.
   a. Tentukan diagonal ruangnya!
   b. Hitung luas dari bidang diagonal yang Anda temukan apabila panjang rusuknya 5 cm!

2. Dira ingin membuat kotak aksesoris berbentuk kubus dari kertas karton. Jika luas kertas karton yang dibutuhkan 72 cm^2, berapa luas bidang diagonal pada kotak aksesoris tersebut?
3. Sebuah akuarium berbentuk balok memiliki panjang 75 cm dan tinggi 40 cm. Jika volume air di dalam akuarium tersebut adalah 33.000 cm^3, tentukan:
   a. Lebar akuarium
   b. Luas bidang diagonal akuarium

Siswa diminta untuk menyajikan jawaban menalarnya (Contoh 4.4 dan Contoh 4.5)di depan kelas. Beri kesempatan kepada penyaji untuk menanggapi pertanyaan temannya. Guru diharapkan memberi masukan apabila dirasa perlu dan memandu siswa agar dapat menyimpulkan hasil pada kegiatan Ayo, Menalar dengan tepat.

Alternatif Penyelesaian Latihan 4.2

1. a. *PQVW, SRUT, PSVU, QRWT, SQUW, PRVT*
   b. Misal menghitung luas bidang diagonal *PRVT*, maka luas *PRVT* adalah $25\sqrt{2}$ cm^2
2. Luas permukaan kubus = 6 s^2

   $72 = 6s^2$

   $72/6 = s^2$

   $12 = s^2$

   $\sqrt{12} = s$

   Luas bidang diagonal kubus adalah $12\sqrt{12}$ cm^2
3. a. Lebar = 11 cm
   b. Luas bidang diagonal = 3.032 cm^2

4. Anda memiliki 648 cm^2 kayu yang akan digunakan untuk sebuah tempat perlengkapan berbentuk prisma.
   a. Desain tempat perlengkapan yang memiliki volume 1.008 cm^3!
   b. Jelaskan alasan tentang desain tempat perlengkapan yang Anda buat!
   c. Tentukan luas bidang diagonal dari tempat perlengkapan yang sudah Anda buat desainnya!
5. Museum Louvre di Paris, Prancis berbentuk piramida persegi. Panjang sisi alasnya 116 meter dan tinggi salah satu sisi segitiga adalah 91,7 meter. Tentukan luas bidang diagonal dari Museum Louvre!

Sumber: Big Ideas Math Advanced 1

Pengayaan

6. Pada kubus *ABCD.EFGH*, *P* titik tengah *HD* dan *Q* pada *AE* sehingga *AQ* : *AE* = 1 : 3. Titik *R* terletak pada *BF* sehingga *BR* : *RF* = 1 : 6. Selidiki apakah *PQRG* merupakan sebuah bidang datar? Jelaskan!

Alternatif Penyelesaian Latihan 4.2

4. Langkah awal sebaiknya ditentukan dahulu panjang sisi alas dan tinggi dari prisma yang akan dibuat dengan mengacu pada luas dan volume yang telah diketahui.

5. Panjang sisi
   segitiga = 108,5 m
   Panjang diagonal bidang alas = 164,05 m
   Tinggi piramida = 71,02 m
   Luas bidang diagonal = 5.825,42 m^2

Uji Kompetensi 4

1. Diketahui kubus *ABCD.EFGH* dengan panjang rusuk 6 cm. Tentukan semua diagonal bidang dan ruangnya serta panjangnya.

2. Diketahui limas dengan alas segienam beraturan sebagai berikut.

   Jika diketahu panjang *BE* = 16 cm, maka tentukan luas permukaan dari limas tersebut.

3. Diketahui kubus *ABCD.EFGH* dengan *M* dan *N* adalah perpotongan antara diagonal-diagonal bidang alas dan atas. Tentukan garis yang sejajar dengan *MH*.

4. Tentukan apakah pernyataan berikut benar atau salah.

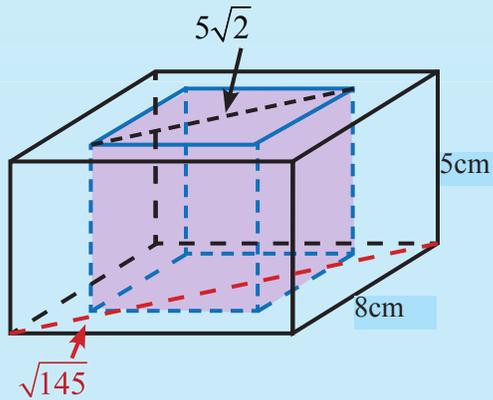
   a. Prisma dengan alas segitiga mempunyai diagonal ruang.

   b. Tabung mempunyai diagonal bidang.

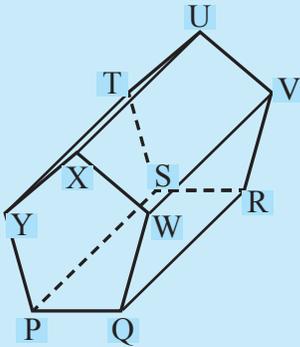
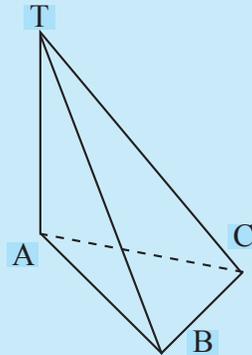
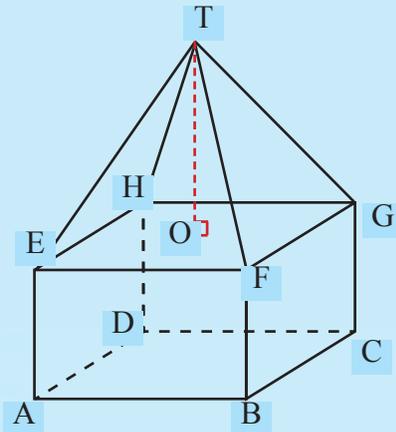
   c. Kubus mempunyai 4 bidang diagonal.

   d. Balok mempunyai 12 diagonal bidang yang panjangnya sama.

   e. Setiap limas tidak mempunyai diagonal ruang.

5. Suatu kubus diambil dari prisma seperti gambar berikut.

Tentukan volume prisma yang tersisa setelah kubus tersebut diambil.

6. Tentukan bidang diagonal yang terdapat pada bangun ruang berikut ini (jika ada).

a.

b.

7. Perhatikan gambar bangun ruang berikut.

Diketahui panjang $AB = BC$, $CG = 3$ cm, luas $ACGE = 18\sqrt{2}$ cm^2 dan $TO = 4$ cm. Tentukan volume bangun ruang tersebut.

1. Diagonal bidang: *AC, BD, EG, FH, AH, DE, BG, CF, AF, BE, DG, CH.*

   Panjang tiap-tiap diagonal bidang = $6\sqrt{2}$ cm

   Diagonal ruang: *AG, CE, BH, DF.*

   Panjang tiap-tiap diagonal ruang = $6\sqrt{3}$ cm

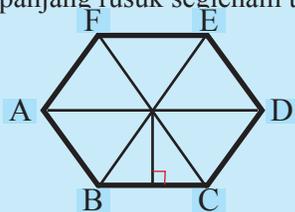
2. Dari alas limas yang berbentuk segienam beraturan dapat diketahui bahwa panjang rusuk segienam tersebut adalah 8 cm.

   Segitiga yang terbentuk dari segienam tersebut merupakan segitiga sama sisi sehingga luas alas limas adalah 6 × luas salah satu segitiga sama sisi tersebut.

   Diperoleh luas *ABC.DEF* = $96\sqrt{3}$ cm².

   Luas *TCD* = 52 cm².

   Sehingga luas permukaan *T. ABCDEF* = $96\sqrt{3}$ + 312 cm².

3. *BN*

4. a. Salah

   b. Salah

   c. Salah

   d. Salah

   e. Benar

5.

Dari gambar di samping dapat ditentukan bahwa panjang rusuk kubus yang terdapat di dalam prisma adalah 5 cm. Sehingga volume kubus adalah 125 cm^3.

Karena diagonal bidang alas prisma adalah cm, maka dapat ditentukan panjang salah satu rusuk prisma yaitu 9 cm. Sehingga volume prisma adalah 9 cm × 8 cm × 5 cm = 360 cm^3.

Oleh karena itu volume prisma yang tersisa setelah kubus diambil = 360 cm^3 – 125 cm^3 = 235 cm^3.

6. a. *YWRS, VTPQ, SVWP, TRQY, PXUS, QXUR* dst

   b. Tidak Ada

7. Dari yang diketahui maka dapat ditentukan panjang AC = $\dfrac{\text{Luas } ACGE}{\text{panjang } GC} = \dfrac{18\sqrt{2}}{3} = 6\sqrt{2}$ cm.

   Karena AC merupakan diagonal bidang $ABCD$ maka dapat ditentukan panjang AB = 6 cm.

   Sehingga volume bangun ruang = volume prisma + volume limas

   $$= (AB \times BC \times CG) + \frac{EF \times FG \times TO}{3} = (6 \times 6 \times 3) + \frac{6 \times 6 \times 4}{3}$$

   = 156 cm^3

.

Integral Tentu

Kompetensi Dasar Dan Pengalaman Belajar

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
1.1 Menghayati dan mengamalkan agama yang dianutnya 2.1 Menghayati perilaku disiplin, sikap kerjasama, sikap kritis dan cermat dalam bekerja menyelesaikan masalah kontekstual 2.2 Memiliki dan menunjukkan rasa ingin tahu, motivasi internal, rasa senang dan tertarik dan percaya diri dalam melakukan kegiatan belajar ataupun memecahkan masalah nyata 3.7 Memahami konsep jumlah Rieman dan integral tentu suatu fungsi dengan menggunakan fungsi-fungsi sederhana non-negatif. 3.8 Menggunakan Teorema Fundamental Kalkulus untuk menemukan hubungan antara integral dalam integral tentu dan dalam integral tak tentu. 4.7 Mengolah data dan membuat model fungsi sederhana non negatif dari masalah nyata serta menginterpretasikan masalah dalam gambar dan menyelesaikan masalah dengan mengunakan konsep dan aturan integral tentu. 4.8 Mengajukan masalah nyata dan mengidentikasi sifat fundamental kalkulus dalam integral tentu fungsi sederhana serta menerapkanny adalam pemecahan masalah.	Melalui pembelajaran Integral Tertentu, siswa memperoleh pengalaman belajar: 1. Mengaproksimasi luas daerah dengan mengunakan jumlah poligon-poligon (segi empat). 2. Menemukan konsep jumlah Riemann dengan menggunakan konsep sigma dan jumlah poligon-poligon. 3. Mendefinisikan integral tentu menggunakan konsep jumlah Riemann

Biografi Bernhard Riemann

Sumber: Dokumen Kemdikbud

Bernhard Riemann lahir di Breselenz, sebuah desa didekat Danneberg di Kerajaan Hanover di Jerman. Riemann merupakan anak kedua dari 6 bersaudara. Keluarga Riemann miskin dan Riemann serta saudara-saudaranya lemah serta sakit-sakitan. Meskipun hidup dalam kemiskinan dan kekurangan gizi, ayah Riemann berhasil mengumpulkan dana yang cukup untuk mengirim puteranya yang kini berusia 19 tahun ke Universitas Göttingen yang terkenal itu. Di sana, dia bertemu untuk pertama kali Carl Friedrich Gauss, yang dijuluki "Pangeran Ilmu Matematika," salah seorang matematikawan terbesar sepanjang masa. Bahkan sampai sekarang, Gauss digolongkan oleh para ahli matematika sebagai salah satu dari ketiga matematikawan paling terkenal dalam sejarah: Archimedes, Isaac Newton, dan Carl Gauss.

Hidup Riemann singkat, hanya 39 tahun. Ia tidak mempunyai waktu untuk menghasilkan karya matematika sebanyak yang dihasilkan Cauchy atau Euler. Tetapi karyanya mengagumkan untuk kualitas dan kedalamannya. Makalah-makalah matematisnya menetapkan arah baru dalam teori fungsi kompleks meprakarsai studi mendalam dari apa sekarang yang disebut topologi, dan dalam geometri memulai perkembangan yang memuncak 50 tahun kemudian dalam teori Relativitas Einstein.

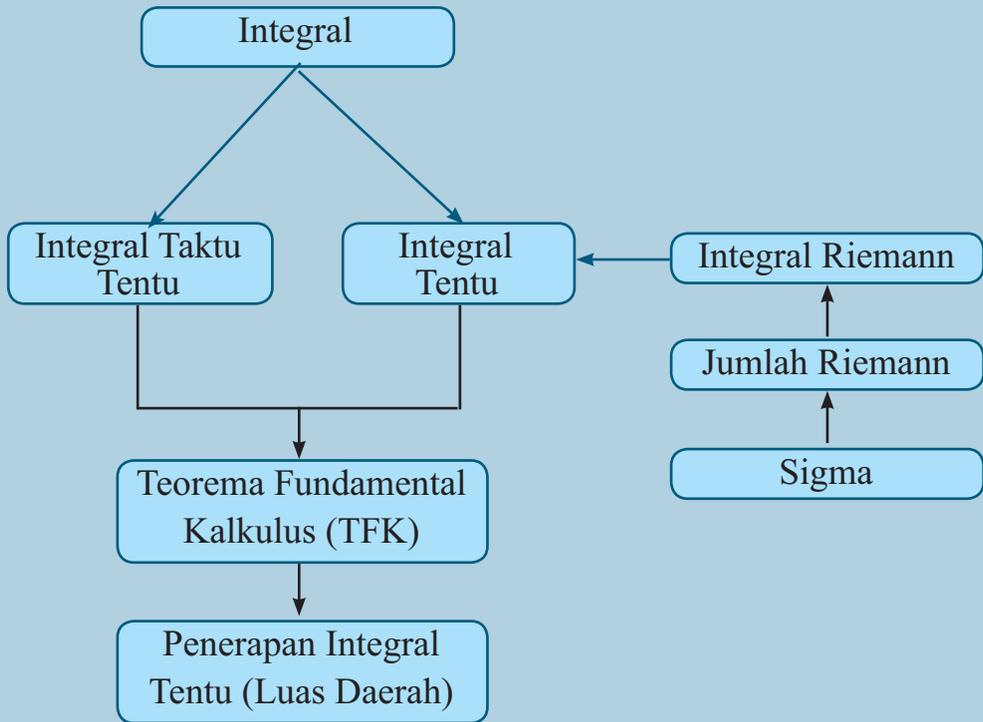
Walaupun Newton dan Leibniz keduanya mempunyai suatu versi tentang Intergal dan mengetahui tentang Teorema Dasar dari kalkulus intergal, Riemanlah yang memberi kita definisi modern tentang **Intergal Tentu**. Untuk menghormatinya, disebut **Intergal Riemann**. Riemann juga dihubungkan dengan *fungsi zeta Riemann, lema Riemann, manipol Riemann, teorema pemetaan Riemann, problem Riemann-Hilbert, teorema Rieman-Roch, persamaan Cauchy-Riemann.*

Sumber: www.thefamouspeople.com/profiles/bernhard-riemann-biography-440.php

Beberapa hikmah yang mungkin bisa kita petik, diantara:

1. Kemiskinan dan kekurangan/kelemahan fisik bukan alasan untuk berhenti belajar dan mengejar cita-cita, selama ada kemauan pasti ada jalan
2. Nilai karya seseorang tidak hanya dilihat dari kuantitas belaka karena yang tak kalah pentingnya dalah kualitas dari karya itu sendiri.

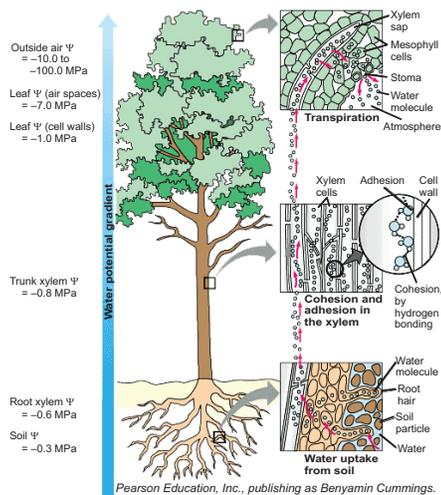
Peta Konsep

Integral
Integral Taktu Tentu
Integral Tentu
Integral Riemann
Jumlah Riemann
Sigma
Teorema Fundamental Kalkulus (TFK)
Penerapan Integral Tentu (Luas Daerah)

Kegiatan Sebelum Pembelajaran

- Ingatkan siswa tentang konsep luas daerah bidang datar, seperti persegi panjang, segitiga, jajaran genjang melalui tanya-jawab tentang rumus luas bidang datar tersebut
- Ingatkan siswa tentang menggambar grafik fungsi sederhana seperti fungsi $f(x) = 4$, $f(x) = x$ dan $f(x) = x^2$

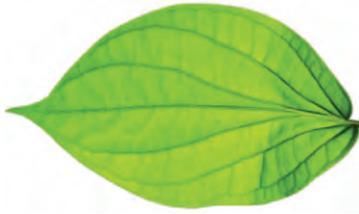
Subbab 5.1 Notasi Sigma, Jumlah Riemann dan Integral Tentu

Kegiatan 5.1.1 Menentukan Luas Permukaan Daun

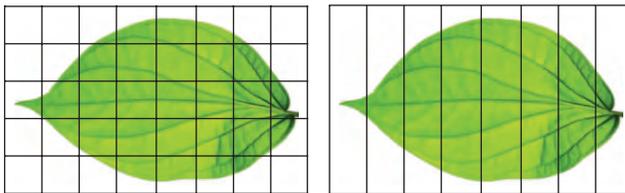
Secara alamiah tumbuhan mengalami kehilangan air melalui penguapan. Proses kehilangan air pada tumbuhan ini disebut transpirasi. Pada transpirasi, hal yang penting adalah difusi uap air dari udara yang lembab di dalam daun ke udara kering di luar daun. Kehilangan air dari daun umumnya melibatkan kekuatan untuk menarik air ke dalam daun dari berkas pembuluh yaitu pergerakan air dari sistem pembuluh dari akar ke pucuk, dan bahkan dari tanah ke akar. Besarnya uap air yang ditranspirasikan dipengaruhi oleh beberapa faktor, antara lain: (1) Faktor dari dalam tumbuhan (jumlah daun, luas daun, dan jumlah stomata); (2) Faktor luar (suhu, cahaya, kelembaban, dan angin).

Gambar 5. 1 Proses Transpirasi Pada Tumbuhan

Aktivitas

- Guru mengajak siswa berdiskusi tentang proses transpirasi pada daun pohon, dan menanyakan faktor-faktor yang mempengaruhi kecepatan/tingginya proses transpirasi pada daun tanaman.
- Guru bersama siswa menyimpulkan tentang pengaruh luas permukaan daun terhadap kecepatan transpirasi pada daun tanaman
- Guru memotivasi siswa melalui diskusi tentang manfaat mengetahui luas daun untuk mengukur laju transpirasi, dengan harapan siswa terdorong untuk berpkir tentang bagaimana cara/strategi untuk menghitungnya.

Berikut penampang salah satu daun:

Gambar 5. 2 Penampang sebuah daun

Karena luas permukaan daun merupakan faktor yang mempengaruhi laju transpirasi pada tumbuhan, maka informasi mengenai ukuran luas daun berguna untuk mengetahui laju transpirasi tersebut.

Selanjutnya, cobalah anda amati gambar permukaan daun berikut ini:

Gambar 5. 3 Dua Versi Penempatan Daun Pada Permukaan Kertas berpetak dan berkolom

Berdasarkan hasil pengamatan/membaca informasi tentang pengaruh luas daun terhadap laju transpirasi serta Gambar 5.3, coba anda buat minimal 3 pertanyaan/dugaan awal/kesimpulan awal mengenai luas daun. Upayakan pertanyaan yang anda buat memuat kata-kata "luas daerah", "membagi/mempartisi", "persegipanjang" dan "nilainya paling mendekati".

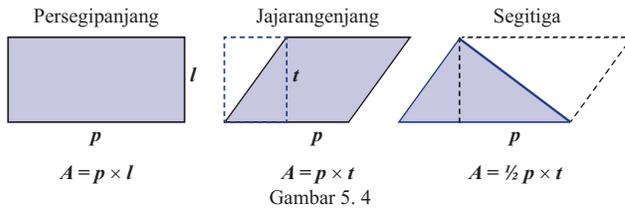
Dengan mengamati gambar 5.3. siswa diajak berdiskusi untuk menetapkan gambar yang mana dapat memudahkan siswa mengukur/menghitung luas daun.

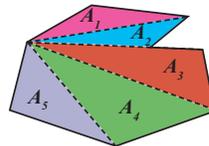
Ayo Menanya

- Guru meminta siswa membuat dugaan/pertanyaan terkait masalah luas permukaan daun.
- Guru bisa memandu/memicu pertanyaan siswa dengan memberi kata kunci (luas daerah,membagi, persegipanjang)

Dari sekian banyak pertanyaan yang anda buat, mungkin ada diantaranya pertanyaan-pertanyaan berikut:

1. Bagaimana cara menghitung luas daun tersebut?
2. Konsep luas apa yang bisa diterapkan untuk menghitung luas bidang secara umum?
3. Bagaimana cara memperkirakan secara akurat ukuran luas daerah yang memiliki bentuk tak beraturan?

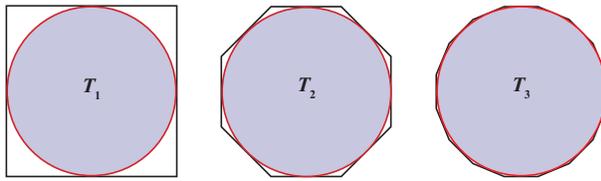
Untuk mengumpulkan informasi yang mendukung jawaban atas pertanyaan-pertanyaan yang anda ajukan, coba perhatikan gambar-gambar berikut ini:

Gambar 5. 4

Dari Gambar 5.4, cobalah Anda cermati tentang bagaimana penentuan luas segitiga dan jajarangenjang menggunakan konsep luas persegipanjang.

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$$

Gambar 5. 5 Poligon/segibanyak *A*

Dari Gambar 5.5, cobalah amati dan buatlah kesimpulan terkait hubungan antara luas segibanyak *A* dan luas segitiga-segitiga A_1, A_2, ..., A_5.

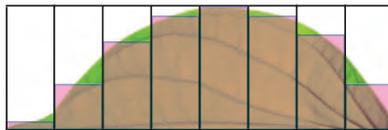
Ayo Menggali Informasi

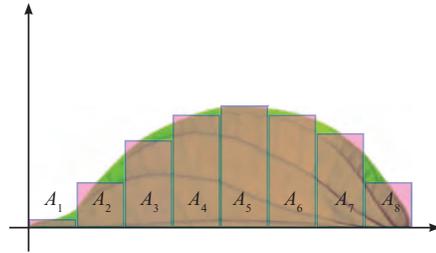
- Guru meminta siswa mengaitkan hubungan luas daerah A dengan jumlah luas semua segitiga-segitiga pembentuknya
- Guru meminta siswa mengaitkan hubungan lingkaran dengan luas segibanyak/ poligon dan membandingkan poligon yang memiliki luas mendekati luas lingkaran.

Gambar 5. 6

Dari Gambar 5.6, cobalah amati dan buatlah kesimpulan tentang hubungan antara luas lingkaran dengan luas segibanyak yang menyelimuti lingkaran tersebut.

Kembali ke masalah luas penampang daun, selanjutnya perhatikan gambar berikut:

Gambar 5.7

Berdasarkan Gambar 5.7, apa yang bisa Anda simpulkan terkait luas daun awal dengan luas daun setelah dipotong? Apakah berarti untuk mencari luas daun, cukup ditentukan luas separuh daunnya, sebagai berikut:

Gambar 5. 8 Penampang Setengah Daun

- Guru meminta siswa focus pada daerah setengah lingkaran, kemudian perhatikan partisi daun tesebut. Kemudian dengan menetapkan ketinggian masing-masing persegi panjang pada masing-masing partisi sedemikian sehingga luasnya mendekati luas daun pada masing-masing partisi.
- Guru meminta siswa memperhatikan penempatan daun pada bidang kartesius, mintalah pendapat siswa terkait luas total persegi panjang yang terbentuk dengan luas daun
- Guru meminta siswa fokus pada cara penulisan penjumlahan yang lebih simple sebagai awal mengenalkan notasi sigma.

Gambar 5. 9 Penempatan Setengah Daun Pada Koordinat Kartesius

Dengan demikian, luas separuh daun bisa dihitung dengan menghitung jumlah luas semua persegipanjang. Apakah luas separuh daun (A_{daun}) sama dengan jumlah semua luas persegipanjang tersebut ($A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 + A_8$)?

Ketika Anda perhatikan jumlah luas-luas persegipanjang

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 + A_8$$

Pertanyaan menarik yang bisa Anda ajukan adalah apakah ada cara yang praktis atau singkat penulisan bentuk jumlah tersebut.

Untuk menyatakan jumlah tersebut dalam bentuk yang sederhana digunakan ***notasi sigma*** $\sum_{i=1}^{8} A_i$, yang berarti kita menjumlahkan semua bilangan dalam bentuk yang diindikasikan sebagai indeks ***i*** yang merupakan bilangan bulat, mulai dari bilangan yang ditunjukkan di bawah $\sum$ dan berakhir pada bilangan di atas $\sum$.

Contoh 5.1

Nyatakanlah bentuk jumlah $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ dalam notasi sigma.

Alternatif Penyelesaian Contoh 5.1

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

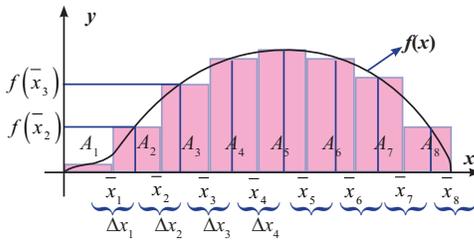
Contoh 5.2

Nyatakanlah bentuk jumlah deret persegi $1 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$ dalam notasi sigma.

Contoh 5.3

Bandingkanlah dan simpulkan pasangan nilai sigma berikut ini:

1. $\sum_{i=1}^{n} ca_i$ dan $c\sum_{i=1}^{n} a_i$
2. $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)$ dan $\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$
3. $\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)$ dan $\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$

Misalkan batas tinggi daun pada Gambar 5.9 diwakili oleh grafik fungsi $f(x)$ pada interval $[0, a]$ dengan partisi (bagian) sebanyak 8, sehingga diperoleh sketsa sebagai berikut:

Gambar 5. 10

Alternatif Penyelesaian Contoh 5.2

$$1 + 2^2 + ... + n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2$$

Alternatif Penyelesaian Contoh 5.3

a. $$\sum_{i=1}^{n} ca_i = ca_1 + ca_2 + ... + ca_n = c(a_1 + a_2 + ... + a_n) = c\sum_{i=1}^{n} a_i$$

b. $$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + ... + (a_n + b_n)$$

$$= (a_1 + a_2 + ... + a_n) + (b_1 + b_2 + ... + b_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

Berdasarkan informasi pada Gambar 5.10. Lengkapilah isian berikut:

$A_1 \quad = f\left(\bar{x}_1\right)\Delta x_1$

$A_2 \quad = f\left(\bar{x}_2\right)\ldots$

$A_3 \quad = \ldots\Delta x_3$

$A_4 \quad = \ldots$

$A_5 \quad = \ldots$

$A_6 \quad = \ldots$

$A_7 \quad = \ldots$

$A_8 \quad = \ldots$

Berdasarkan konsep sigma dan jawaban anda terkait tiap-tiap luas persegipanjang dengan panjang $f(x_i)$ dan lebar Δx_i, buatlah kesimpulan terkait luas total (keseluruhan persegi yang terbentuk).

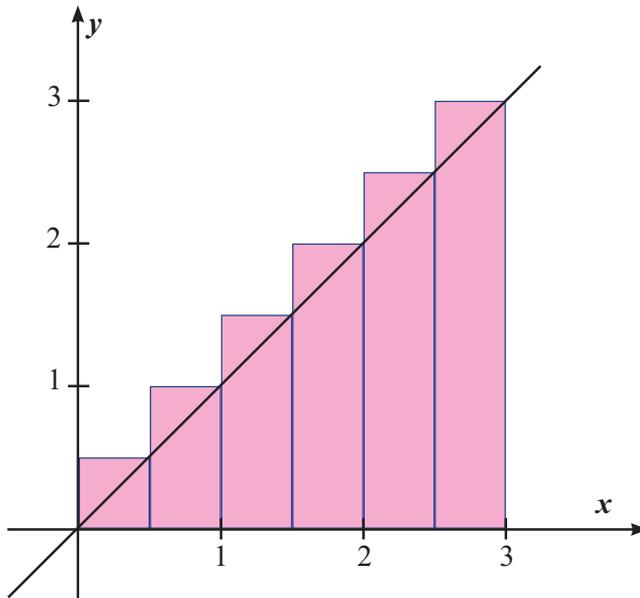
$$A_1 + A_1 + \ldots + A_1 = f\left(\bar{x}_1\right)\Delta x_1 + \ldots + f\left(\bar{x}_8\right)\Delta x_8 = \sum_{i=1}^{8} f\left(\bar{x}_i\right)\Delta x_i$$

Selanjutnya nilai $\sum_{i=1}^{n} f\left(\bar{x}_i\right)\Delta x_i$ disebut ***Jumlah Riemann*** fungsi $f(x)$, dengan $\bar{x}_i$ adalah titik wakil pada interval ke-i dan Δx_i lebar interval ke-i dan n banyak subinterval.

Contoh 5.4

Misalkan diketahui suatu fungsi $f(x) = x$ pada interval [0, 3], tentukan jumlah Riemann dengan menggunakan 6 subinterval sama panjang dan titik ujung kanan subinterval sebagai titik wakil tiap-tiap subinterval.

Alternatif Penyelesaian

Untuk dapat menentukan jumlah Riemann fungsi $f(x) = x$ dengan 6 subinterval pada selang [0, 3], perhatikan grafik fungsi $f(x) = x$ pada interval [0, 3], berikut:

Gambar 5.11

Dengan demikian didapat,

$f\left(\bar{x}_1\right) = f\left(0,5\right) = 0,5$

$f\left(\bar{x}_2\right) = \ldots$

$f\left(\bar{x}_3\right) = \ldots$

$f\left(\bar{x}_4\right) = \ldots$

$f\left(\bar{x}_5\right) = \ldots$

$f\left(\bar{x}_6\right) = \ldots$

Karena lebar subinterval sama berarti $\Delta x_i = \frac{3-0}{6} = \frac{1}{2}$ = 0,5 untuk setiap i = 1, ..., 6

Jadi jumlah Riemann dari $f(x) = x$ pada interval [0, 3] dengan 6 subinterval adalah

$$\sum_{i=1}^{6} f\left(\bar{x}_i\right)\Delta x_i = f\left(\bar{x}_1\right)\Delta x_1 + f\left(\bar{x}_2\right)\Delta x_2 + f\left(\bar{x}_3\right)\Delta x_3 + f\left(\bar{x}_4\right)\Delta x_4 + f\left(\bar{x}_5\right)\Delta x_5 + f\left(\bar{x}_6\right)\Delta x_6$$

$$\sum_{i=1}^{6} f\left(\bar{x}_1\right)\Delta x_i =$$

$$= f\left(\bar{x}_1\right)\Delta x + f\left(\bar{x}_2\right)\Delta x + f\left(\bar{x}_3\right)\Delta x + f\left(\bar{x}_4\right)\Delta x + f\left(\bar{x}_5\right)\Delta x + f\left(\bar{x}_6\right)\Delta x$$

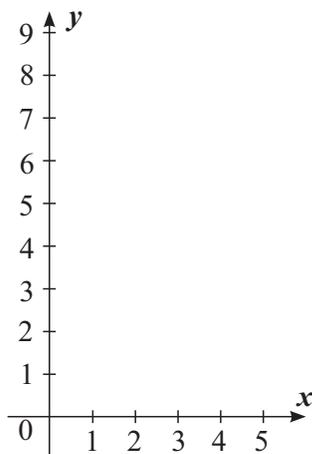
$$= \left(f\left(x_1\right) + f\left(x_2\right) + f\left(x_3\right) + f\left(x_4\right) + f\left(x_5\right) + f\left(x_6\right)\right)\Delta x$$

$= \ldots$

Contoh 5.5

Misalkan diketahui suatu fungsi $f(x) = x^2$ pada interval [0, 3], tentukan jumlah Riemann dengan menggunakan 6 subinterval sama panjang dan titik ujung kanan subinterval sebagai titik wakil tiap-tiap subinterval.

Alternatif Penyelesaian

Untuk dapat menentukan jumlah Riemann dari $f(x) = x^2$ dengan 6 subinterval pada interval [0, 3], dengan menggunakan cara penyelesaian pada Contoh 5.14, gambarlah grafik fungsi $f(x) = x^2$ pada interval [0, 3] dan 6 persegipanjang sebanyak 6 dengan lebar sama dan tinggi persegipanjang sebesar nilai fungsi pada batas kanan subinterval berikut:

Gambar 5.11

Karena panjang subinterval sama berarti $\Delta x_i = \frac{3-0}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5$ untuk setiap $i = 1, ..., 6$

Jadi jumlah Riemann dari $f(x) = x^2$ pada interval [0, 3] dengan 6 subinterval adalah

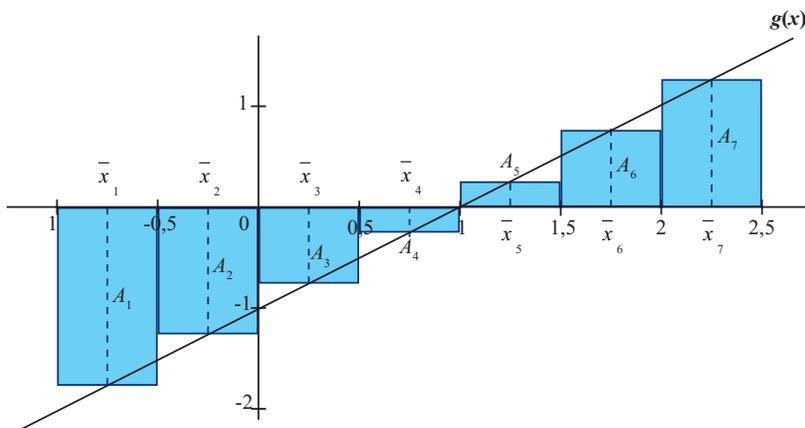
$$\sum_{i=1}^{6} f\left(\overline{x}_1\right)\Delta x_i$$

$$= f\left(x_1\right)\Delta x + f\left(x_2\right)\Delta x + f\left(x_3\right)\Delta x + f\left(x_4\right)\Delta x + f\left(x_5\right)\Delta x + f\left(x_6\right)\Delta x$$

$$= \left(f\left(x_1\right) + f\left(x_2\right) + f\left(x_3\right) + f\left(x_4\right) + f\left(x_5\right) + f\left(x_6\right)\right)\Delta x$$

$= ...$

Contoh 5.6

Bila diperhatikan fungsi pada Contoh 5.15 merupakan fungsi positif (mengapa?). Sketsakan fungsi $g(x) = x - 1$ pada interval $[-1, 2]$ memakai 7 subinterval dan titik tengah subinterval sebagai titik wakilnya, buatlah kesimpulan tentang hubungan antar jumlah Riemann dengan jumlah luas persegipanjang (A_i) yang terbentuk.

Gambar 5.12

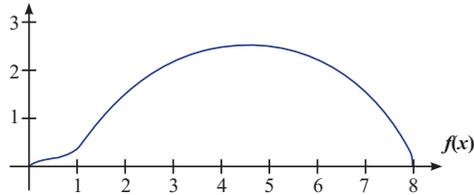
Jumlah Riemann dari $(x) = x - 1$ pada interval $[-1, 2]$ adalah

$$\sum_{i=1}^{7} g\left(\bar{x}_i\right)\Delta x_i =$$

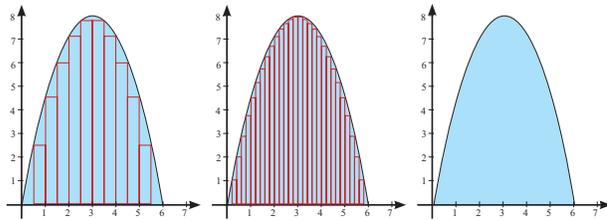
$$g\left(\bar{x}_1\right)\Delta x_1 + g\left(\bar{x}_2\right)\Delta x_2 + g\left(\bar{x}_3\right)\Delta x_3 + g\left(\bar{x}_4\right)\Delta x_4 + g\left(\bar{x}_5\right)\Delta x_5 + g\left(\bar{x}_6\right)\Delta x_6 + g\left(\bar{x}_7\right)\Delta x_7$$

$$= A_1 + \ldots + \ldots + \ldots + A_5 + \ldots + \ldots$$

Alternatif Penyelesaian

Kembali ke pembahasan tentang menentukan luas daun yang diwakili oleh luas daerah yang dibatasi oleh grafik fungsi $f(x)$ dan sumbu-x pada interval $[0, a]$, seperti yang terlihat pada gambar berikut:

Gambar 5. 13

pertanyaan menarik yang bisa diajukan adalah apakah jumlah luas semua persegi panjang yang terbentuk sama dengan luas separuh daun yang ingin dicari? Jika tidak, bagaimana menghitungnya agar nilainya sama?

Untuk menjawab pertanyaan tersebut perhatikan gambar berikut ini:

Gambar 5. 14

Pada saat siswa mengamati Gambar 5.13 siswa diajak berdiskusi tentang:

- hubungan jumlah luas-luas persegipanjang dengan luas daerah diatas sumbu-x dan dibatasi fungsi $f(x)$
- hubungan banyaknya persegipanjan yang terbentuk akibat banyaknya partisi/selang yang dibuat dengan luas daerah dibawah grafik $f(x)$
- hubungan antara jumlah luas poligon-poligon dengan jumlah Riemann
- konsep limit tak hingga dari suatu barisan/fungsi

Kesimpulan yang diharapkan:

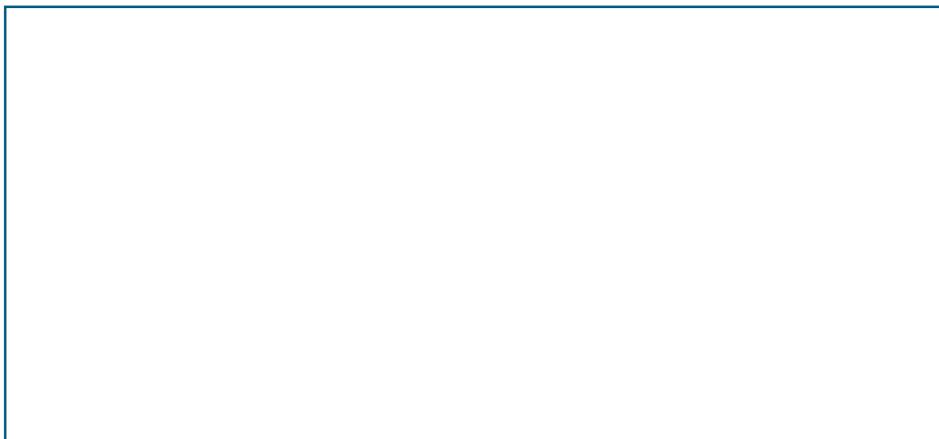
- semakin banyak interval yang dibuat maka jumlah semua polygon/jumlah Riemann akan mendekati luas daerah yang dibatasi grafik fungsi $f(x)$
- Jumlah Rieman dari fungsi yang membatasi daerah yang akan ditentukan luasnya akan sama jika banyaknya interval ynag dibaut sebanyak-banyaknya.

Cobalah buat kesimpulan terkait daerah di bawah kurva dengan luas seluruh persegi panjang yang dibentuk dengan berbagai kondisi (panjang persegipanjang makin mengecil).

Dengan menggunakan hasil kesimpulan anda, gabungkan dengan konsep limit tak hingga, yakni:

$$\lim_{n \to \infty} g(n)$$

Misalkan dalam hal ini $g(n)$ merupakan jumlah Riemann oleh $f(x)$ dengan n subinterval.

Buatlah kesimpulan terkait luas daun atau luas daerah yang dibatasi oleh grafik fungsi f dan sumbu-x:

Dengan demikian luas setengah daun tersebut (A_{daun}) adalah:

$$A_{daun} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\bar{x}_1\right) \Delta x_i$$

Selanjutnya $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\bar{x}_1\right) \Delta x_i$ disebut ***Integral Tentu*** fungsi $f(x)$ pada interval $[0, a]$, ditulis $\int_0^a f(x)\ dx$.

Contoh 5.7

Misalkan diberikan suatu fungsi $f(x) = x$, tentukan integral tentu dari $f(x) = x$ pada interval [0, 3] atau $\int_0^3 x\, dx$

Alternatif Penyelesaian

Untuk menentukan integral tentu dari fungsi $f(x) = x$ pada interval [0, 3], maka yang perlu dilakukan pertama kali adalah menentukan jumlah Riemann dari fungsi $f(x) = x$ dengan n subinterval pada interval tersebut (mengapa?)

Dengan demikian perlu menetapkan: panjang masing-masing subinterval dan Titik wakil pada masing-masing subinterval ($\bar{x}_i$).

- Panjang masing-masing subinterval ($\Delta \bar{x}_i$) dibuat sama (apa boleh berbeda? mengapa dibuat sama?), yakni:

  $\Delta x_i = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$, untuk setiap i = 1, ..., n
- Kita bisa memilih titik wakilnya ($\bar{x}_i$) adalah titik batas kanan pada tiap-tiap interval (apa boleh ujung kiri/ tengah-tengah interval?), sehingga didapat:

$$\bar{x}_1 = x_1 = 0 + \Delta x_1 = 0 + \frac{2}{n} = \frac{2}{n}$$

$$\bar{x}_2 = x_2 = 0 + 2 \cdot \Delta x_1 = 0 + 2 \cdot \frac{2}{n} = \frac{4}{n}$$

$$\bar{x}_3 = x_3 = \ldots$$

$$\bar{x}_4 = x_4 = \ldots$$

$$\ldots$$

$$\bar{x}_i = x_i = \ldots$$

$$\ldots$$

$$\bar{x}_n = x_n = \ldots$$

Jumlah deret aritmatika, deret kuadrat dan kubik dalam notasi sigma

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1 + 4 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1 + 8 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Sehingga nilai fungsi pada tiap-tiap titik wakilnya diperoleh:

$f\left(\overline{x}_1\right) = f\left(x_i\right) = x_i = ...$

Dengan demikian jumlah Riemannnya adalah

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\overline{x}_i\right)\Delta x_i = f\left(\overline{x}_1\right)\Delta x_1 + f\left(\overline{x}_2\right)\Delta x_2 + ... + f\left(\overline{x}_n\right)\Delta x_n$$

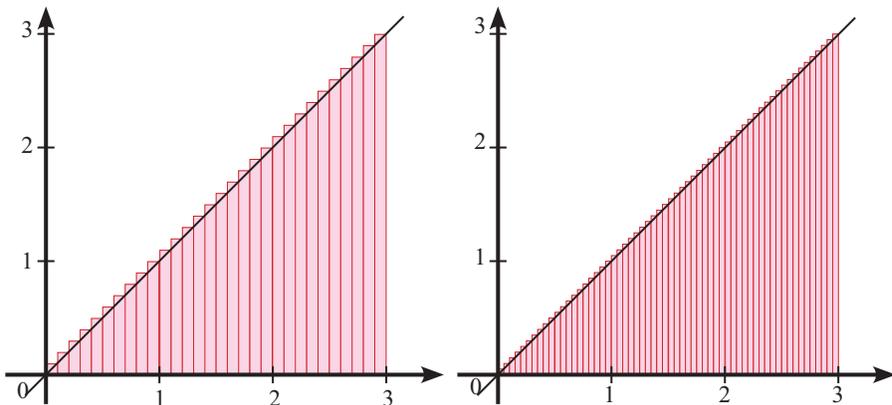
Karena subinterval sama panjang $\Delta x_i = \Delta x = \frac{3}{n}$ untuk setiap $i = 1, 2, ..., n$

sehingga $\sum_{i=1}^{n} f\left(\overline{x}_i\right)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i\right)\Delta x$

$$= f\left(x_1\right)\Delta x_1 + f\left(x_2\right)\Delta x_2 + ... + f\left(x_n\right)\Delta x_n = \left(f\left(x_1\right) + f\left(x_2\right) + ... + f\left(x_n\right)\right)\frac{3}{n}$$

$= ...$

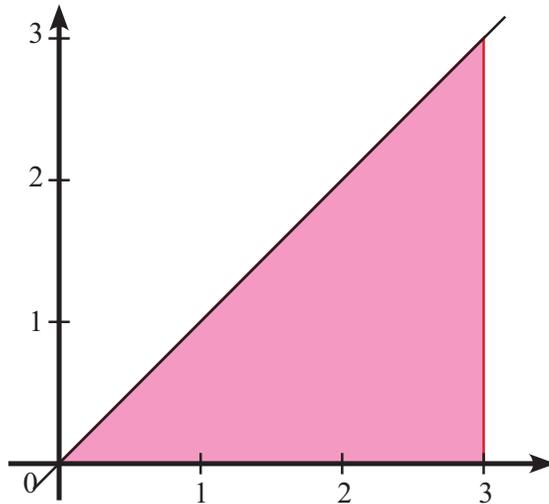
Dengan demikian diperoleh jumlah Riemann untuk fungsi $f(x) = x$ pada interval [0, 3] adalah

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\overline{x}_i\right)\Delta x_i = ...$$

Gambar 5.16

Jadi integral tentu dari $f(x) = x$ pada interval [0, 3] atau $\int_0^3 x\, dx$ adalah $\int_0^3 x\, dx$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\overline{x}_1\right)\Delta x_i = ...$$

Contoh 5.8

Dengan menggunakan Jumlah Rienmann, tentukan luas daerah yang diarsir pada gambar berikut:

Gambar 5.15

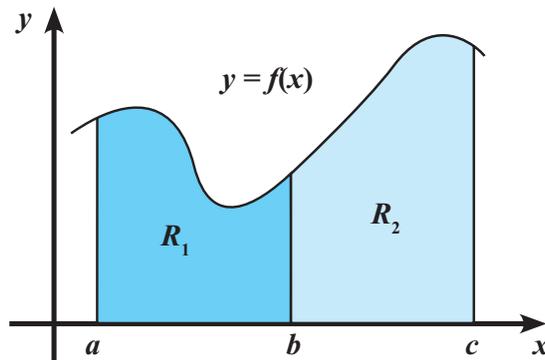
Contoh 5.9

Misalkan diberikan suatu fungsi $f(x) = x^2$, tentukan integral tentu dari $f(x) = x^2$, pada interval [0, 2] atau $\int_0^2 x^2 dx$.

Alternatif Penyelesaian

Anda bisa menggunakan langkah-langkah penyelesaian pada Contoh 5.17 atau menggunakan langkah-langkah penyelesaian sendiri. Anda bisa mulai dengan menggambarkan grafik fungsi pada interval yang diberikan, selanjutnya tentukan nilai integral tentunya.

Contoh 5.10

Perhatikan daerah R yang merupakan gabungan dari daerah R_1 dan R_2 yang diarsir pada gambar berikut:

Tentukan luas daerah R, R_1 dan R_2 dan nyatakan hubungan antara antara luas R dengan luas total R_1 dan R_2 dalam persamaan integral.

Dari hasil mengasosiasi, buatlah kesimpulan umum terkait:

a. Notasi Sigma dan Sifat-sifatnya

b. Jumlah Rieman untuk fungsi f

c. Integral Tentu untuk fungsi f yang didefinisikan pada interval tutup $[a, b]$

d. Luas daerah di atas sumbu-x dan dibatasi oleh grafik fungsi positif f pada interval $[a, b]$ dan nilai integral tentu $\int_a^b f(x)dx$.

Ayo Mengomunikasikan

Pada sesi mengomunikasi, guru memberikan penguatan terkait kesimpulan yang dibuat siswa, meliputi:

a. Notasi sigma dan sifat-sifatnya

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

Sifat-sifatnya:

1). $\sum_{i=1}^{n} k \cdot a_i = k\sum_{i=1}^{n} a_i$

2). $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

3. $\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$

b. Jumlah Riemann fungsi f terkait partisi P

$$R_P = \sum_{i=1}^{n} f\left(\overline{x_i}\right)\triangle x_i$$

Dengan:

n : banyaknya partisi P

$\overline{x_i}$: titik wakil pada interval ke-i

$\Delta \overline{x_i}$: lebar partisi ke-i

c. Integral tentu fungsi f pada interval tertutup $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|P|\to\infty} R_P = \lim_{|P|\to\infty} f\left(\overline{x_i}\right)\triangle x_i$$

Dengan $|P|$: lebar partisi, berarti $|P| \to 0$: lebar partisinya dibuat sekecil-kecilnya. Jika lebar partisi dibuat semakin kecil maka banyak partisi (n) yang dibuat semakin banyak. Dengan notasi matematika dapat ditulis $n \to \infty$, sehingga definisi integral tentunya menjadi $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} f\left(\overline{x_i}\right)\triangle x_i$

Kaitkan temuan pada Contoh 5.7 sampai dengan Contoh 5.10, hubungan yang bisa dimpulkan adalah luas daerah yang diatasi oleh grafik fungsi positif $f(x)$ pada interval tertutup $[a, b]$ sama dengan $\int_a^b f(x)\,dx$

Tuliskanlah kesimpulan yang Anda dapatkan terkait jumlah Riemann dan integral tentu untuk fungsi *f* yang didefinisikan pada interval tutup [*a, b*].
Tukarkan tulisan tersebut dengan teman sebangku/kelompok lainnya. Secara santun, silahkan saling berkomentar, menanggapi komentar, memberikan usul dan menyepakati ide-ide yang paling tepat.

Latihan 5.1

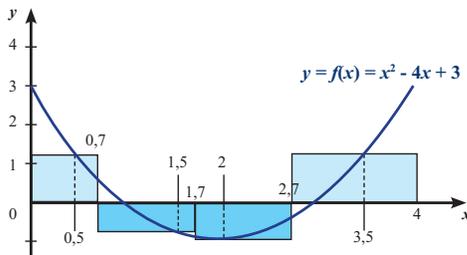
1. Perhatikan gambar berikut:

Gambar 1

Sumber : Kemendikbud

a. Nyatakan masalah banyaknya jeruk yang disajikan pada Gambar 1 dalam notasi sigma.

b. Tentukan banyaknya jeruk yang disusun di atas kotak seperti yang terlihat pada Gambar 1.

2. Tentukan jumlah Riemann dari fungsi yang diperlihatkan oleh gambar berikut

Gambar 2

Alternatif Penyelesaian Latihan 5.1

1.a. $\sum_{i=1}^{7} i^2$

1.b. $\sum_{i=1}^{7} i^2 = \frac{7(7+1)(2\cdot 7+1)}{6}$

$= \frac{7\cdot 8\cdot 15}{6} = 140$

2. $R_p = \sum_{i=1}^{4} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$

$$\begin{aligned} &= f(0,5)(0,7-0) \\ &+ f(1,5)(1,7-0,7) \\ &+ f(2)(2,7-1,7) \\ &+ f(3,5)(4-2,7) \end{aligned}$$

3. Tentukan jumlah Riemann fungsi $f(x) = -x^2 + x$ pada interval [–2, 0] dengan menggunkan 4 subinterval dengan lebar sama panjang dan titik-titik ujung kiri subinterval sebagai titik wakilnya.

4. Tentukan jumlah Riemann fungsi $g(x) = -2x + 4$ pada interval [1, 5] (menggunakan n subinterval dengan lebar sama panjang).

5. Tentukan integral tentu fungsi $f(x) = 2x^2 - x$ pada interval [0, 3] atau $\int_0^3 2x^2 - xdx$.

6. Tentukan integral tentu $\int_{-2}^{2} 2xdx$.

7. Nyatakan limit berikut sebagai suatu integral tentu

   a. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{4i}{n}}\frac{4}{n}$

   b. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(1+\frac{2i}{n}\right)\frac{2}{n}$

   c. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\cos(\frac{\pi}{n}) + \cos(\frac{2\pi}{n}) + \cos(\frac{3\pi}{n}) + ... + \cos(\frac{n\pi}{n})\right)$

   d. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n^4} + \frac{n+2}{n^4} + \frac{n+3}{n^4} + ... + \frac{2n}{n^4}\right)$

8. Tunjukkan bahwa $\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right)$

9. Gunakan definisi jumlah Riemann, untuk menunjukkan bahwa:

   a. $\int_a^a f(x)\,\mathrm{dx} = 0$

   b. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,\ a > b$

3. $-6{,}25$

4. $R_P = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(-2\left(\bar{x}_i\right) + 4\right)\left(\frac{4}{n}\right)$

5. $\frac{27}{2} = 13{,}5$

6. 0

7. a. $\int_0^4 \sqrt{x}dx$ b. $\int_0^2 (1+x)\,dx$

8. Petunjuk:

   Cara 1: menggunakan definisi integral Riemann

   Cara 2: menggunakan rumus luas segitiga

9. a. Petunjuk:

   $\Delta x_i = a - a = 0$

   b. Petunjuk:

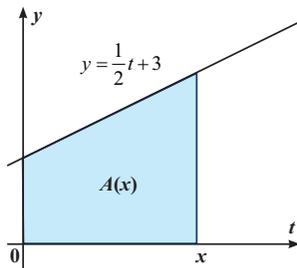
   $\Delta x_i = \frac{b-a}{n} = -\frac{(a-b)}{n}$

Subbab 5.2 Teorema Fundamental Kalkulus.

Anda telah mempelajari tentang integral tentu pada subbab sebelumnya. Untuk menentukan nilai integral tentu menggunakan jumlah Riemann, ternyata memerlukan langkah yang rumit. Newton dan Leibniz telah menemukan cara yang lebih mudah dalam menentukan nilai integral tentu. Cara tersebut dikenal sebagai Teorema Fundamental Kalkulus (TFK).

Pada uraian berikut, Anda akan belajar tentang teorema fundamental kalkulus. Teorema fundamental kalkulus terdiri atas teorema fundamental kalkulus I dan teorema fundamental kalkulus II. Teorema ini banyak digunakan dalam masalah terapan, misalnya mencari luas suatu daerah yang dibatasi oleh kurva. Seperti apa teorema fundamental kalkulus itu? Silahkan Anda pelajari dalam uraian berikut.

Kegiatan 5.2.1 Teorema Fundamental Kalkulus I

Contoh 5.11

Gambar 5.11

Diberikan daerah yang dibatasi oleh garis $y=\frac{1}{2}t+3$, $t=0$, $t=x$. Daerah yang diarsir membentuk trapesium. Dengan menggunakan rumus luas trapesium didapat,

$$A(x) = \frac{1}{2}(3+\frac{1}{2}x+3)x$$
$$= 3x+\frac{1}{4}x^2$$

Jika $A(x)$ diturunkan, maka diperoleh:

$$A'(x) = 3+\frac{2}{4}x = 3+\frac{1}{2}x.$$

Membelajarkan Teorema Fundamental Kalkulus

1. Kegiatan Sebelum Pembelajaran Ingatkan kembali materi integral tentu dengan jumlah Riemann yang telah dipelajari.
2. Ingatkan kembali rumus untuk menentukan luas segitiga dan trapesium.
3. Ajak siswa untuk mengamati Contoh 5.11 dan 5.12

Ayo Mengamati

Contoh 5.11

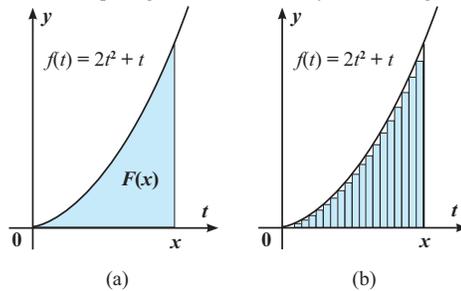
Minta siswa untuk mencermati luas daerah yang membentuk trapesium dengan tinggi x. Luas daerah tersebut dicari dengan dua cara, menggunakan rumus luas trapesium dan integral

Luas daerah tersebut dapat dinyatakan dengan $\int_0^x \frac{1}{2}t+3\,dt$, sehingga

$$A'(x)=\frac{d}{dx}\left(3x+\frac{1}{4}x^2\right)=\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{1}{2}t+3\,dt=\frac{1}{2}x+3$$

dengan kata lain $\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{1}{2}t+3\,dt=\frac{1}{2}x+3$

Contoh 5.12

Misalkan luas daerah pada gambar di bawah dinyatakan sebagai fungsi $F(x)$.

Gambar 5.12 Luas daerah yang dibatas oleh $f(t)=2t^2+t$, sumbu-x dan garis $t = x$.

Dengan mempartisi interval tersebut menjadi n subinterval sama panjang (Gambar 5.2.1b), panjang subinterval $\Delta t=\frac{x-0}{n}=\frac{x}{n}$, maka bentuk integral tentunya adalah:

$$\begin{aligned}\int_0^x 2t^2+t\,dt &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\frac{ix}{n})\frac{x}{n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(2(\frac{ix}{n})^2+\frac{ix}{n}\right)\frac{x}{n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}\left(2\frac{x^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2+\frac{x}{n}\sum_{i=1}^{n} i\right)\end{aligned}$$

Contoh 5.12

Minta siswa untuk mencermati luas daerah yang dibentuk oleh sumbu-t, kurva $f(t) = 2t^2 + t$ dan garis $t = x$. Gunakan integral Riemann untuk menentukan luas daerah.

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n}\left(2\frac{x^2}{n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{x}{n}\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x^3}{n^3}\frac{(2n^3+3n^2+n)}{3} + \frac{x^2}{n}\frac{(n+1)}{2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2x^3}{3} + \frac{x^3}{n} + \frac{x^3}{3n^2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2n}\right)$$

$$= \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$$

Oleh karena $F(x) = \int_0^x 2t^2 + t\, dt$, maka

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right) = \frac{d}{dx}\int_0^x 2t^2 + t\, dt = 2x^2 + x$$

Dengan kata lain $\frac{d}{dx}\int_0^x 2t^2 + t\, dt = 2x^2 + x$

Dari Contoh 5.11 dan Contoh 5.12 di atas, diperoleh $\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{1}{2}t + 3\, dt = \frac{1}{2}x + 3$

dan $\frac{d}{dx}\int_0^x 2t^2 + t\, dt = 2x^2 + x$. Hubungan inilah yang disebut teorema **fundamental kalkulus I**.

Setelah mengamati Contoh 5.11, Contoh 5.12 coba Anda membuat pertanyaan. Mungkin Anda akan bertanya: Seperti apa bentuk umum teorema fundamental kalkulus I itu? Sekarang, buatlah pertanyaan-pertanyaan pada tempat berikut ini.

Ayo Menanya

Minta siswa untuk membuat pertanyaan-pertanyaa terkait dengan Contoh 5.11 dan Contoh 5.12

Contoh pertanyaan:

- Seperti apa bentuk umum teorema fundamental kalkulus I?
- Apakah setiap fungsi yang kontinu mempunyai antiturunan?
- Digunakan untuk apa teorema fundamental kalkulus I itu?

Seperti apakah bentuk umum teorema fundamental kalkulus I? Untuk memahami lebih jelas perhatikan kembali Contoh 5.11 dan Contoh 5.12 di atas. Dari kedua contoh tersebut diperoleh kesimpulan

1. $\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{1}{2}t+3\,dt=\frac{1}{2}x+3$
2. $\frac{d}{dx}\int_0^x 2t^2+t\,dt=2x^2+x$

Misalkan $\frac{1}{2}t+3=f(t)$, maka $f(x)=\frac{1}{2}x+3$ sehingga

$$\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{1}{2}t+3\,dt = \frac{1}{2}x+3$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)\,dt = f(x)$$

Dengan cara yang sama, misal $2t^2+t=g(t)$, maka $g(x)=2x^2+x$ sehingga

$$\frac{d}{dx}\int_0^x 2t^2+t\,dt = 2x^2+x$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^x g(t)\,dt = g(x)$$

Untuk lebih meyakinkan dugaan Anda, mintalah kepada Guru Anda beberapa fungsi yang kontinu di (a, b). Misalkan x ∈ (a, b), carilah $\int_a^x f(t)\,dt$ dari tiap-tiap fungsi tersebut. Selidikilah, apakah diperoleh kesimpulan yang sama dengan Contoh 5.11 dan 5.12?

Ayo Menggali Informasi

Minta siswa untuk memahami dan mengumpulkan informasi tentang teorema fundamental kalkulus I dari Contoh 5.11 dan 5.12

Untuk lebih memahami, beri siswa beberapa fungsi berikut.

1. $f(t) = t$
2. $g(t) = t^2$
3. $h(t) = 2t - 3$

Minta siswa untuk melakukan hal yang serupa dengan Contoh 5.11 dan 5.12

Teorema Fundamental Kalkulus I (TFK I)
Jika f kontinu pada $[a, b]$ dan x sebarang titik di (a, b), maka

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

Sebagai seorang pelajar yang berfikir logis, tentunya kalian tidak percaya begitu saja dengan suatu pernyataan. Pernyataan tersebut harus dibuktikan terlebih dahulu baru dipercaya kebenarannya. Sekarang, marilah kita buktikan kebenaran dari teorema fundamental kalkulus I tersebut. Sebelumnya perlu diingat kembali tentang sifat penambahan interval pada integral tentu. jika f adalah fungsi yang terintegralkan pada interval yang memuat a, b, dan c, maka

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

Bukti Teorema Fundamental Kalkulus I

Didefinisikan $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

$$F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt$$

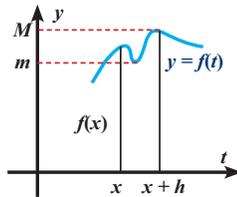
$$= \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt \quad \text{.. (1)}$$

Didapat

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Misalkan m = minimum $f(x)$ untuk x di $[a, b]$

M = maksimum $f(x)$ untuk x di $[a, b]$

berdasarkan gambar di samping diperoleh

Sumber: Calculus 9th

Ajak siswa untuk memahami pembuktian teorema fundamental kalkkulus I.

Alasan pada langkah pembuktian:

a. : berdasarkan sifat penambahan interval

b. : karena $h > 0$

$$mh \leq \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leq Mh$$

$$mh \leq F(x+h) - F(x) \leq Mh$$

$$m \leq \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leq M \quad \text{.......... (2)}$$

$$\lim_{h \to 0} m \leq \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leq \lim_{h \to 0} M$$

$\lim_{h \to 0} m = f(x)$ dan $\lim_{h \to 0} M = f(x)$, sehingga $f(x) \leq \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leq f(x)$

Dengan menggunakan teorema apit didapat $\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$

Karena $\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{d}{dx} F(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\,dt$

Disimpulkan bahwa $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\,dt = f(\mathrm{x})$

Nah, sekarang cobalah untuk memberi alasan pada persamaan **(1)** dan persamaan **(2)** di atas.

Dari pengamatan Anda melalui contoh dan bukti tentang teorema fundamental kalkulus I buatlah kesimpulan. Tulislah kesimpulan yang Anda buat pada selembar kertas. Kemudian tukarkan kesimpulan Anda dengan teman yang lain. Cermati kesimpulan teman Anda, kritisi, tanyakan dan berikan saran perbaikan jika dianggap perlu.

Minta siswa untuk membuat kesimpulan tentang teorema fundamental kalkulus I. Tunjuk beberapa siswa untuk menyampaikan kesimpulannya.

Sebelum membelajarkan teorema fundamental kalkulus II, ingatkan kembali integral tentu dengan jumlah Riemann dan teorema fundamental kalkulus I.

Kegiatan 5.2.2 Teorema Fundamental Kalkulus II

Pada subbab sebelumnya Anda telah mempelajari integral tentu dengan menggunakan jumlah Riemann. Untuk menghitung integral tentu dengan menggunakan jumlah Riemann dibutuhkan langkah yang panjang dan agak rumit. Amati dengan cermat beberapa bentuk integral tentu berikut diambil dari subbab sebelumnya.

Tabel 5.2.1. Fungsi dan integral tentunya.

$f(x)$	$\int_a^b f(x)\,dx$ (Dengan Jumlah Riemann)	$F(x)$	$F(a)$	$F(b)$	$F(b)-F(a)$
x	$\int_0^3 x\,dx = \frac{9}{2}$	$\frac{x^2}{2}+C$	C	$\frac{9}{2}+C$	$\frac{9}{2}$
x^2	$\int_0^2 x^2\,dx = \frac{8}{3}$	$\frac{x^3}{3}+C$	C	$\frac{8}{3}+C$	$\frac{8}{3}$
$-2x+4$	$\int_1^5 -2x+4\,dx = -8$	$-x^2+4x+C$	$3+C$	$-5+C$	-8
$2x^2-x$	$\int_0^3 2x^2-x\,dx = \frac{27}{2}$	$\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+C$	C	$\frac{27}{2}+C$	$\frac{27}{2}$

Contoh 5.13

Tentukan $\int_1^2 x+2\,dx$.

daerah yang diarsir pada gambar berikut adalah representasi $\int_1^2 x+2\,dx$ yang membentuk trapesium. Luas daerah tersebut adalah

$$L = \frac{1}{2}(3+4)\cdot 1 = \frac{7}{2}$$

Ayo Mengamati

Ajak siswa untuk mengamati dan mencermati Tabel 5.2.1. Ajak siswa untuk mengamati kerkaitan antar kolom pada Tabel 5.2.1.

Pada Contoh 5.13 ajak siswa untuk mencermati luas daerah yang terbentuk. Kemudian lakukan proses yang serupa pada Tabel 5.2.1

Gambar 5.14

Nah sekarang akan kita coba membuat proses yang sama dengan Tabel 5.2.1.

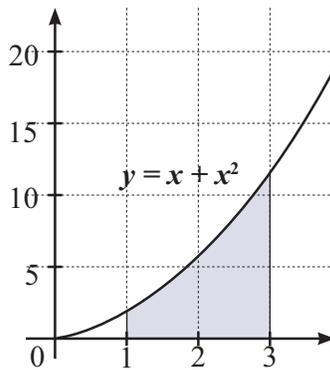
$f(x) = x + 2$, sehingga $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + C$

$F(1) = \frac{1}{2} + 2 + C = \frac{5}{2} + C$ dan

$F(2) = 2 + 4 + C = 6 + C$

$F(2) - F(1) = 6 + C - \left(\frac{5}{2} + C\right) = \frac{7}{2}$

Contoh 5.14

Tentukan integral tentu $\int_1^3 x + x^2 dx$.

Gambar 5.15

Daerah yang diarsir pada gambar di atas adalah representasi $\int_1^3 x + x^2 dx$.

Untuk menghitung $\int_1^3 x + x^2 dx$ digunakan jumlah Riemann. Misalkan interval tersebut dipartisi menjadi n subinterval dengan lebar subinterval yang sama, yaitu $\Delta x = \frac{2}{n}$, sehingga $x_i = 1 + \frac{2i}{n}$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{2i}{n}+\left(\frac{2i}{n}+1\right)^2\right)\frac{2}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4}{n}+\frac{12i}{n^2}+\frac{8i^2}{n^3}\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{4}{n}+\frac{12}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i+\frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(4+\frac{12}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}+\frac{8}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(4+6+\frac{6}{n}+\frac{8}{3}+\frac{4}{n}+\frac{4}{3n^2}\right)$$

$$= 10+\frac{8}{3}=\frac{38}{3}$$

Jadi $\int_1^3 x+x^2 dx = \frac{38}{3}$

Nah sekarang akan kita coba membuat proses yang sama dengan Tabel 5.2.1.

$f(x)=x+x^2$, sehingga $F(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+C$

$F(1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+C=\frac{5}{6}+C$ dan $F(3)=\frac{9}{2}+9+C=\frac{27}{2}+C$

$F(3)-F(1)=\frac{27}{2}+C-\left(\frac{5}{6}+C\right)=\frac{38}{3}$

Ayo Menanya

Setelah mengamati dengan cermat Tabel 5.2.1 dan beberapa contoh di atas, mungkin Anda mempunyai dugaan dan pertanyaan-pertanyaan. Mungkin pertanyaan Anda sebagai berikut:

1. Apa hubungan antara kolom (1) dengan kolom (3) pada Tabel 5.2.1?
2. Adakah keterkaitan antara turunan dan integral tak tentu pada Tabel 5.2.1?

Ayo Menanya

Setelah mengamati Tabel 5.2.1, Contoh 5.13 dan Contoh 5.14, ajak siswa untuk membuat pertanyaan.

3. Apakah hasil pada kolom (2) dan kolom (6) pada Tabel 5.2.1 selalu sama untuk sebarang fungsi $f(x)$?
4. Apakah konstanta C di kolom (3) pada Tabel 5.2.1 dapat diabaikan?

Tulislah dugaan dan pertanyaan-pertanyaan Anda pada kotak berikut:

Teorema Fundamental Kalkulus II (TFK II)

Jika f kontinu pada $[a, b]$ dan F antiturunan f pada $[a, b]$, maka

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Perlu Anda cermati, bahwa TFK II ini berlaku apabila f merupakan fungsi kontinu pada $[a, b]$.

$F(b) - F(a)$ dinotasikan $\left[F(x)\right]_a^b$, sehingga TFK II dapat dinyatakan sebagai

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

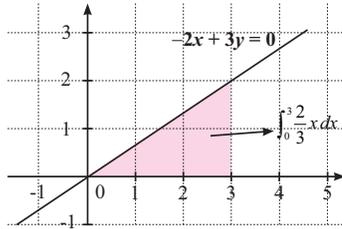
Contoh 5.15

Gunakan TFK II untuk menentukan $\int_1^3 2x\,dx$

Alternatif Penyelesaian

$$\int_1^3 2x\,dx = \left[x^2\right]_1^3 = 3^2 - 1^2 = 8$$

Contoh 5.16

Luas daerah yang dibatasi oleh garis $-2x+3y=0$, sumbu x, garis $x = 0$ dan $x=3$ dapat dinyatakan dalam bentuk integral tentu $\int_0^3 \frac{2}{3}x\,dx$. Luas daerah yang terbentuk adalah $\left[\frac{1}{3}x^2\right]_0^3 = \frac{1}{3}3^2 - \frac{1}{3}0^2 = 3$

Gambar 5.16. Luasan daerah dengan menggunakan integral tentu.

Alternatif Penyelesaian

Luasan daerah pada Gambar 5.16 di atas ternyata dapat dicari dengan integral tentu $\int_0^3 \frac{2}{3}x\,dx$. Hal ini sesuai dengan luas daerah dengan menggunakan rumus luas segitiga. Dari Gambar 5.16 di atas, panjang alas segitiga adalah 3 dan tingginya 2. Sehingga luas segitiga tersebut $L = \frac{1}{2}a \cdot t = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3$.

Ayo Menggali Informasi

Buatlah beberapa soal tentang integral tentu. Tukarkan soal yang Anda buat dengan teman Anda. Kemudian selesaikan soal yang telah ditukar. Anda dapat menggunakan integral Riemann, TFK I dan TFK II dalam menyelesaikan soal. Secara santun, diskusikan jawaban tiap-tiap soal. Jika ada hal yang tidak Anda mengerti, silahkan minta bantuan dari Guru Anda.

Ayo Menggali Informasi

Ajak siswa untuk membuat soal tentang integral tentu. Beri scafolding pada siswa yang membutuhkan. Ingatkan siswa untuk membuat soal yang sederhana dulu, kemudian soal yang kompleks

Ajak siswa untuk membuktikan teorema fundamental kalkulus II dengan memberikan alasan pada langkah (1), (2), dan (3).

Ayo Menalar

Anda telah mempelajari Teorema Fundamental Kalkulus I (TFK I). Hal penting dari TFK I adalah $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$. Sekarang kita gunakan TFK I. untuk membuktikan TFK II.

Misalkan $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.
Hal ini berarti $g(x)$ adalah antiturunan dari f. .... (1)
Oleh karena itu, jika $F(x)$ adalah antiturunan lain untuk f, $F(x)$ dan $g(x)$ hanya dibedakan oleh suatu konstanta C, sehingga dapat dinyatakan sebagai:

$$F(x) = g(x) + C$$

akibatnya

$F(a) = g(a) + C$ dan $F(b) = g(b) + C$ .... (2)

$g(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$ dan $g(b) = \int_a^b f(t)\,dt$ .... (3)

Sehingga

$$F(b) - F(a) = g(b) + C - (g(a) + C) = g(b) + C - g(a) - C = g(b) - g(a) = \int_a^b f(t)\,dt$$

Diperoleh kesimpulan $\int_a^b f(t)\; dt = F(b) - F(a)$.

Sekarang berilah alasan pada langkah (1), (2), dan (3) pada pembuktian TFK II.

Misalkan $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, Hal ini berarti [a, b] adalah antiturunan dari f.
Alasannya :

Misalkan $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ hal ini berarti $g(x)$ adalah antiturunan dari f (***alasan***: berdasarkan definisi antiturunan).

$F(a) = g(a) + C$ dan $F(b) = g(b) + C$
Alasannya :

$g(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$ dan $g(b) = \int_a^b f(t)\,dt$
Alasannya :

Dari aktivitas dan pengamatan yang telah Anda lakukan, buatlah kelompok yang beranggotakan 4 orang. Kemudian tulislah kesimpulan tentang teorema fundamental kalkulus II. Tukarkan hasil kesimpulan Anda dengan kelompok lain. Amati dan cermati kesimpulan kelompok lain. Kritisi, tanyakan dan beri saran jika diperlukan.

$F(a) = g(a) + C$ dan
$F(b) = g(b) + C$

Alasannya : karena $F(x) = g(x) + C$, maka jika $x = a$ diperoleh

$F(a) = g(a) + C$

demikian juga
$F(b) = g(b) + C$

$g(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$

dan $g(b) = \int_a^b f(t)\,dt$

Alasannya :

$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

Ayo Mengomunikasikan

Minta siswa untuk membuat kesimpulan tentang teorema fundamental kalkulus II.

Latihan 5.2

1. Tentukan $G'(x)$ jika:

   a. $G(x) = \int_1^x 3t\ dt$

   b. $G(x) = \int_x^1 3t\ dt$

   c. $G(x) = \int_1^x \sin t^2\ dt$

   d. $G(x) = \int_1^x \cos\sqrt{t}\ dt$

2. Diketahui fungsi f yang $f(x) = \int_1^x \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\, du$, dan $x \geq 0$. Tentukan interval sehingga grafik $y = f(x)$:

   a. naik

   b. turun

   c. cekung ke atas.

3. Tentukan f jika:

   a. $\int_1^x f(t)\ dt = 2x + 5$

   b. $\int_1^x f(t)\ dt = \sin x$

   c. $\int_0^x f(t)\ dt = \cos^2 x$

4. Selidiki, adakah fungsi f yang memenuhi $\int_0^x f(t)\ dt = x + 1$

5. Tentukan integral berikut.

   a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4x - 3\cos 2x\, dx$

   b. $\int_{-1}^{1} x^3\, dx$

   c. $\int_1^3 x^2 - x + \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

1. a. $3x$ b. $-3x$

   c. $\sin x^2$ d. $\cos\sqrt{x}$

2. $f(x) = \int_1^x \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\, du = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}$

   $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

   a. interval agar $f(x)$, $(0, \infty)$

   b. interval agar $f(x)$, $(-\infty, 0)$

   c. interval cekung ke atas: $(-\infty, \infty)$

3. a. $f(x) = 2$

   b. $f(x) = \cos x$

   c. $f(x) = \sin x \cos x$

4.

5. a. $\int_0^{\pi/2} 4x - 3\cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\pi^2$

   b. $\int_{-1}^{1} x^3\, dx = 0$

   c. $\int_1^3 x^2 - x + \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \frac{8}{3} + 2\sqrt{3}$

6. Jika diketahui $\int_2^4 3x^2 - 4dx = \int_2^p 4x - 4dx$, tentukan p.

7. Tentukan nilai b jika diketahui nilai $\int_0^b 2x + \sin 2x\, dx = \frac{\pi^2}{4} + 1$

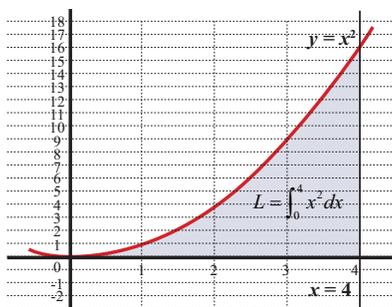
8. Gunakan sifat aditif pada integral tentu untuk menentukan nilai:

   a. $\int_{-2}^{3} |x|\, dx$

   b. $\int_{-2}^{3} |x-1|\, dx$

   c. $\int_{-2\pi}^{2\pi} |\sin x|\, dx$

9. Tunjukkan bahwa $\frac{1}{2}x|x|$ merupakan antiturunan dari $|x|$. Gunakan hasil itu untuk menuliskan $\int_a^b |x|\, dx$ tanpa bentuk integral.

10. Luas daerah yang dibatasi oleh $y = x^2$, sumbu-x, sumbu-y dan garis $x = 4$ adalah $\int_0^4 x^2 dx$. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh fungsi-fungsi tersebut.

Gambar 1

6. $p = 6$ atau $p = 4$

7. $b = \frac{\pi}{2}$

8. a. $\int_{-2}^{3} |x| dx = \frac{13}{2}$

   b. $\int_{-2}^{3} |x-1| dx = \frac{13}{2}$

   c. $\int_{-2\pi}^{2\pi} |\sin x|\, dx = 8$

9. Jika $x \geq 0$, maka $\frac{1}{2}x|x| = \frac{1}{2}x^2$

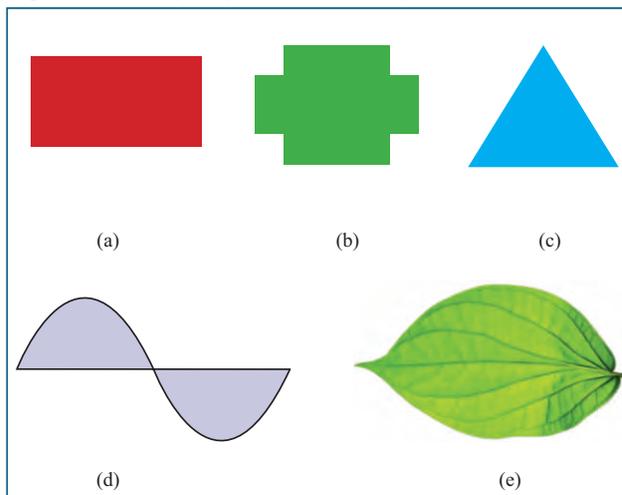
   sehingga $\frac{d}{dx}\frac{1}{2}x^2 = x$

   Jika $x < 0$, maka $\frac{1}{2}x|x| = \frac{1}{2}x^2$

   sehingga $\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{2}x^2\right) = -x$

10. Luas = $\int_0^4 x^2\, dx = \frac{64}{3}$ satuan luas.

Subbab 5.3 Penerapan Integral Tentu

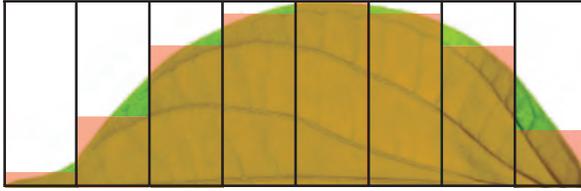
Dapatkah Anda menghitung luas daerah dari bangun berikut?

Gambar 5.17 Penampang beberapa bangun datar.

Dari beberapa bangun datar pada Gambar 5.17 dapatkah Anda menghitung luas daerahnya? Tentunya sangat mudah untuk menghitung luas daerah yang ditunjukkan Gambar 5.17.a, 5.17.b dan 5.17.c. Lantas bagaimana menghitung luas daerah yang ditunjukkan Gambar 5.17.d dan 5.17.e?

Pada uraian sebelumnya Anda telah mempelajari bagaimana cara untuk menentukan luas dari setengah daun. Perhatikan kembali masalah cara menentukan daun berikut ini.

Membelajarkan 5.3 Penerapan Integral Tentu

Kegiatan Sebelum Pembelajaran

1. Ingatkan kembali materi integral tentu dengan jumlah Riemann yang telah dipelajari pada subbab 5.1.
2. Ingatkan kembali beberapa rumus untuk menentukan luas bangun datar, khususnya segitiga dan trapesium.
3. Ingatkan kembali tentang teorema fundamental kalkulus II.

Gambar 5.18 Penampang setengah daun

Untuk menentukan hampiran dari luas daun pada Gambar 5.18 digunakan persegi panjang-persegi panjang atau yang lazim disebut partisi. Agar hampiran dari luas penampang setengah daun ini mendekati luas sesungguhnya, partisi tersebut dibuat sebanyak mungkin. Sehingga luas penampang setengah daun tersebut dinyatakan sebagai

$$A_{daun} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \Delta x_i$$

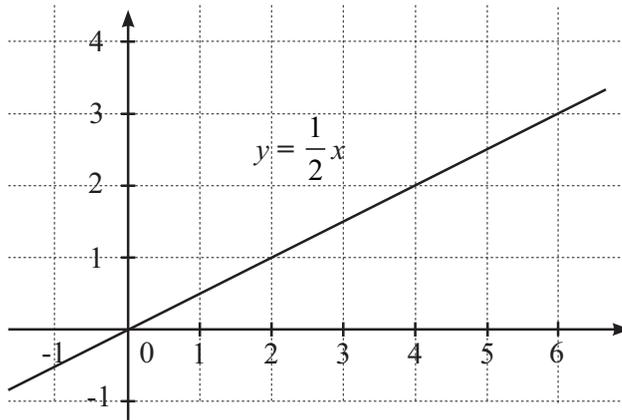
Dengan Δx menyatakan lebar subinterval. Misalkan penampang setengah daun tersebut dibatasi pada interval $[a, b]$, maka luas penampang daun dinyatakan sebagai

$$A_{daun} = \int_a^b f(x) dx$$

Contoh 5.17

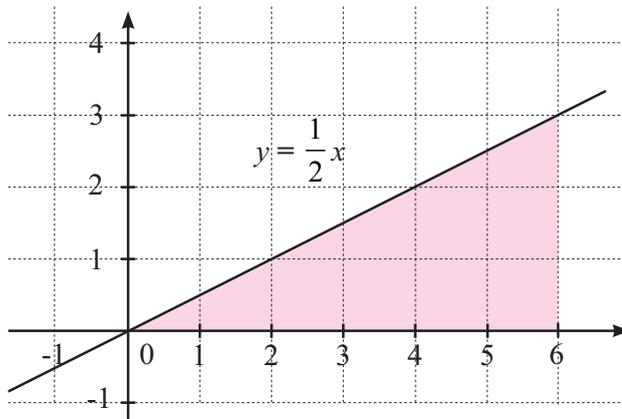
Amatilah gambar garis $y = \frac{1}{2}x$ berikut

Ayo Mengamati

Ajak siswa untuk mengamati dan mencermati Contoh 5.17 sampai Contoh 5.27. Pada masalah tersebut, dipaparkan beberapa kondisi tentang luas dari daerah, ada yang di atas sumbu-*X*, di bawah sumbu-*Y*, mempunyai batas yang dibentuk dari perpotongan dua kurva, dan lain sebagainya. Penentuan luas daerah tersebut menggunakan integral tentu dan penerapan teorema fundamental kalkulus II dengan terlebih dahulu memodelkan bentuk integral tentu.

Gambar 5.19 Gambar garis $y = \frac{1}{2}x$

Dari Gambar 5.19 di atas, tentukan luas daerah yang dibatasi oleh garis $y = \frac{1}{2}x$, sumbu-x, diantara $x = 0$ dan $x = 6$

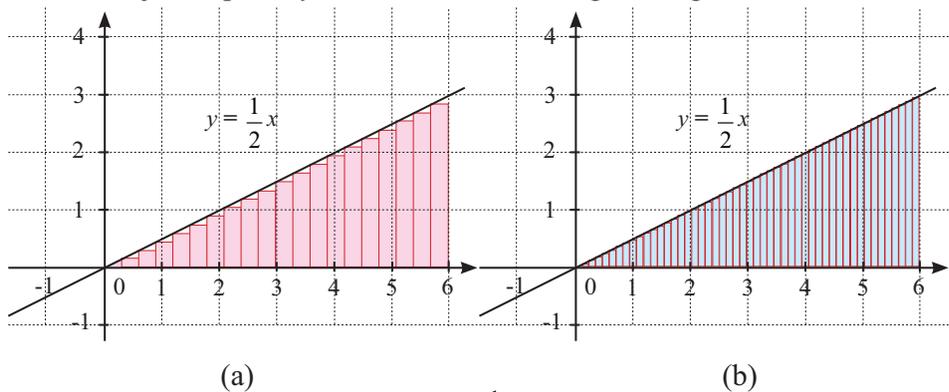
Alternatif Penyelesaian

Apabila dibuat sketsa daerah yang terbentuk oleh garis $y = \frac{1}{2}x$, sumbu-x, diantara $x = 0$ dan $x = 6$ maka diperoleh gambar berikut ini.

Gambar 5.20 Gambar daerah yang dibatasi $y = \frac{1}{2}x$, sumbu-x, diantara $x = 0$ dan $x = 6$

Jika diamati daerah yang terbentuk pada Gambar 5.20 adalah segitiga siku-siku dengan panjang alas 6 satuan dan tinggi 3 satuan. Dengan menggunakan aturan luas segitiga diperoleh

$$\text{Luas} = \frac{1}{2}at = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3 = 9$$

Jadi luas daerah yang dibatasi oleh garis $y = \frac{1}{2}x, x = 0, x = 6$ dan sumbu-x adalah 9 satuan luas. Mungkin Anda bertanya-tanya, Apakah konsep partisi dan integral tentu dapat digunakan pada masalah ini?

Untuk menjawab pertanyaan tersebut, amatilah gambar-gambar berikut.

Gambar 5.21. Daerah yang dibatasi $y = \frac{1}{2}x$, sumbu-x, di antara $x = 0$ dan $x = 6$

Daerah pada Gambar 5.21 (a) dipartisi menjadi 20 subinterval dengan panjang sama dan pada Gambar 5.21 (b) daerah dipartisi menjadi 50 subinterval dengan lebar sama. Jika partisi ini diperbanyak sampai tak hingga subinterval, maka luas daerah yang dibatasi oleh garis $y = \frac{1}{2}x, x = 0, x = 6$ dan sumbu-x dapat dinyatakan sebagai berikut:

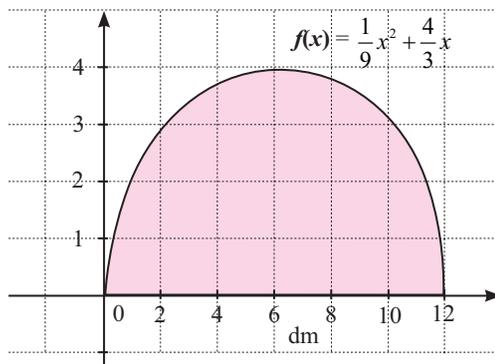
$$\text{Luas} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \int_0^6 y\,dx \quad \text{.....................................} \ (3)$$

Oleh karena $y = \frac{1}{2}x$, maka persamaan (3) dapat dinyatakan sebagai

$$\text{Luas} = \int_0^6 \frac{1}{2}x\, dx = \left[\frac{1}{4}\cdot x^2\right]_0^6 = \left(\frac{1}{4}\cdot 6^2\right) - \left(\frac{1}{4}\cdot 0^2\right) = 9 - 0 = 9$$

Setelah mengkaji uraian di atas, apakah Anda telah menemukan jawaban dari pertanyaan apakah konsep partisi dan integral tentu dapat digunakan untuk menentukan luas daerah yang dibatasi garis $y = \frac{1}{2}x, x = 0, x = 6$ dan sumbu-x?

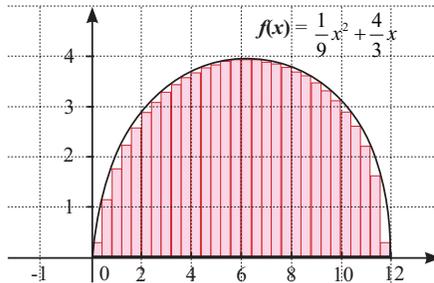
Contoh 5.18

Pemilik rumah ingin mengganti bagian atas dari pintu rumahnya dengan menggunakan kaca bergambar. Bagian atas pintu tersebut dinyatakan dalam fungsi $y = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{3}x$, grafik dari bagian atas pintu rumah ditunjukkan pada Gambar 3.5 berikut. Biaya untuk pembuatan dan pemasangan kaca bergambar adalah Rp500.000 per meter persegi. Jika ada 6 pintu di rumahnya, berapa biaya yang harus dikeluarkan oleh pemilik rumah tersebut?

(a) (b)

Gambar 5.22. Representasi grafik bagian atas daun pintu

Alternatif Penyelesaian

Dari Gambar 5.22 b dapat diketahui daerah yang terbentuk adalah daerah yang dibatasi oleh kurva $f(x) = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{3}x$, diantara x = 0, x = 12 dan sumbu-x. Bagaimana cara menentukan luas daerah tersebut? Coba Anda fikirkan sejenak.

Seperti pada contoh sebelumnya, untuk menentukan luas daerah yang dibatasi kurva $f(x) = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{3}x$, diantara x = 0, x = 12 dan sumbu-x adalah dengan mempartisi daerah tersebut kemudian menggunakan integral tentu.

Gambar 5.23 Partisi daerah dibatasi $f(x) = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{3}x$, diantara $x = 0, x = 12$ dan sumbu-x

Jika daerah tersebut dipartisi sampai tak hingga banyaknya subinterval, maka luas daerah dapat dinyatakan sebagai:

$$\text{Luas} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \int_0^{12} f(x)\,dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(4)}$$

Dengan Δx = menyatakan panjang subinterval.

Oleh karena $f(x) = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{3}x$, maka luas daerahnya adalah:

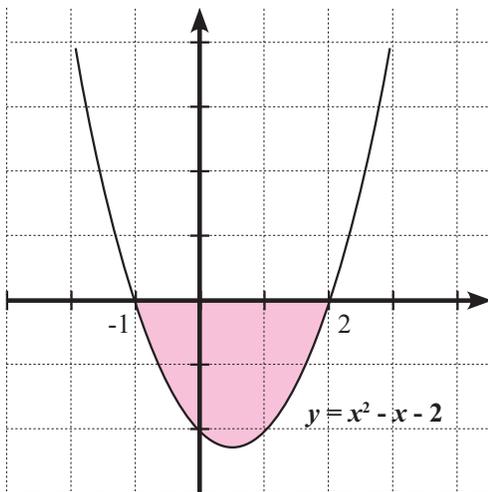
$$\text{Luas} = \int_0^{12} f(x)\,dx = \int_0^{12} -\frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{3}x\,dx = \left[-\frac{1}{27}x^3 + \frac{2}{3}x^2\right]_0^{12} = -\frac{12^3}{27} + \frac{2\cdot 12^2}{3} = 32$$

Jadi luas bagian atas untuk satu pintu adalah 32 dm^2 = 0,32 m^2. Sehingga luas bagian atas untuk 6 pintu adalah 6 × 0,32 = 1,92. Oleh karena biaya pembuatan dan pemasangan kaca Rp500.000/m^2 maka total biaya yang dikeluarkan adalah 1,92 × 500.000 = 960.000

Jadi total biaya yang dikeluarkan untuk pembuatan dan pemasangan kaca adalah Rp960.000,00.

Contoh 5.19

Pada Contoh 5.17 dan 5.18 grafik fungsi yang diberikan berada di atas sumbu-x. Bagaimana jika grafik yang diberikan berada di bawah sumbu-x? Untuk lebih jelasnya, carilah luas daerah yang dibatasi oleh $y = x^2 - x - 2$, $x = -1$, $x = 2$ dan sumbu-x.

Alternatif Penyelesaian

Gambar 5.24

Luas daerah yang dibatasi oleh $y = x^2 - x - 2$ dan sumbu x dinyatakan dalam gambar di samping. Daerah yang terbentuk di bawah sumbu-x. Jika daerah tersebut dipartisi sampai tak hingga banyak subinterval, maka luas daerah tersebut dinyatakan sebagai

$$\text{Luas} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} h_i \Delta x_i$$

Dengan h_i merupakan tinggi dari tiap-tiap subinterval dan Δx_i menyatakan panjang partisi. Oleh karena sumbu-x adalah garis $y = 0$, h_i dapat dinyatakan sebagai $h_i = 0 - f(x_i)$. Dengan demikian

$$\text{Luas} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} h_i \Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} -f(x_i)\Delta x_i = -\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = -\int_{-1}^{2} y\,dx$$

Oleh karena $y = x^2 - x - 2$, maka luas daerahnya adalah

$$\text{Luas} = -\int_{-1}^{2} x^2 - x - 2\, dx = -\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_{-1}^{2} = 4\frac{1}{2}$$

Jadi luas daerah yang dibatasi oleh $y = x^2 - x - 2$, $x = -1$, $x = 2$ dan sumbu x adalah $4\frac{1}{2}$ satuan luas.

Contoh 5.20

Diberikan fungsi $y = x^3$. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh $y = x^3$, garis $x = -1$ dan $x = 1$ serta sumbu-x.

Alternatif Penyelesaian

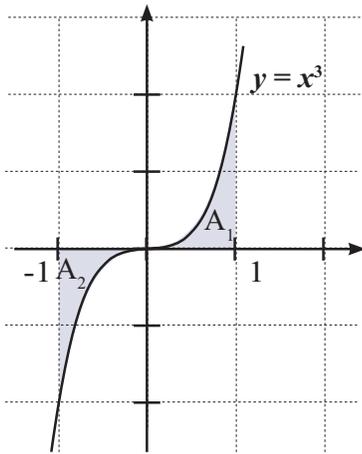
Mungkin Anda berfikiran untuk menentukan luas daerah yang dimaksud adalah

$$\text{Luas} = \int_{-1}^{1} x^3 dx.$$

Dengan menggunakan Teorema Fundamental Kalkulus II, maka akan diperoleh:

$$\int_{-1}^{1} x^3 dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

Sehingga luasnya adalah 0, hal ini tidak sesuai dengan kenyataan. Anda harus berhati-hati menyatakan luas dengan integral tentu. Setidaknya buatlah grafik dari fungsi yang diketahui, kemudian tentukan luas daerah yang dimaksud dan gunakan teknik potong(*partisi*), hampiri dan integralkan.

Luas daerah yang dibatasi oleh $y = x^3$, garis $x = -1$ dan $x = 1$ serta sumbu-x dinyatakan dalam daerah yang diarsir dari grafik berikut:

Gambar 5.25

Luas daerah dibagi menjadi dua bagian, A_1 dan A_2. Daerah A_1 berada di atas sumbu-x, sehingga luasnya

$$A_1 = \lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \int_0^1 x^3\,dx$$

Daerah A_2 berada di bawah sumbu-x, sehingga luasnya

$$A_2 = -\lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = -\int_{-1}^{0} x^3\,dx$$

Luas daerah keseluruhan adalah luas A_1 ditambah dengan A_2.

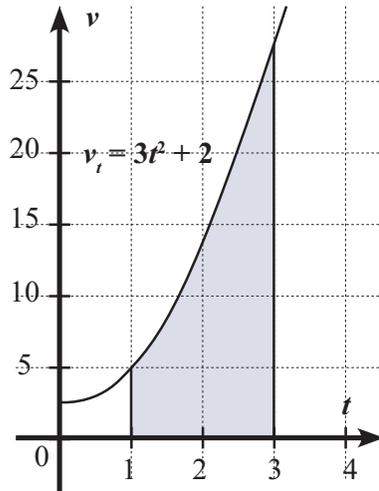
Jadi luas daerah yang dibatasi oleh $y = x^3$, garis $x = -1$ dan $x = 1$ serta sumbu-x adalah $\frac{1}{2}$ satuan luas.

Contoh 5.21

Terdapat suatu grafik yang menggambarkan hubungan antara kecepatan dengan waktu. Kecepatan v pada sumbu-y sedangkan waktu t pada sumbu-x . Diketahui suatu fungsi $v_{(t)} = 3t^2 + 2$ m/s yang tergambar pada grafik. Hitunglah perubahan posisi pada selang waktu $t = 1$ hingga $t = 3$.

Gambar 5.26

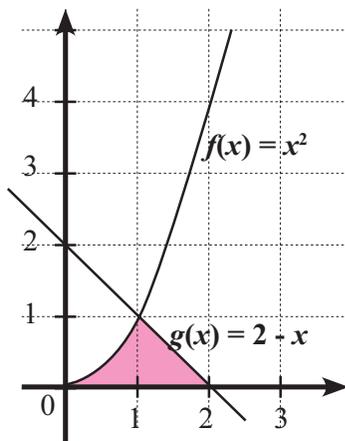
Alternatif Penyelesaian

Dalam fisika, perubahan posisi dinyatakan sebagai s, dengan $s = \int v\,dt$. Representasi dari perubahan posisi pada selang waktu $t = 1$ hingga $t = 3$ adalah daerah yang diarsir pada grafik di samping. Perubahan posisi pada selang waktu $t = 1$ hingga $t = 3$ adalah

$$\int_1^3 3t^2 + 2dt = \left[t^3 + 2t\right]_1^3 = \left(3^3 + 2\cdot 3\right) - \left(1 + 2\right) = 30$$

Jadi perubahan posisi pada selang waktu $t = 1$ hingga $t = 3$ adalah 30 meter.

Contoh 5.22

Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh garis $g(x) = 2 - x$, kurva $f(x) = x^2$, sumbu-x, sumbu-y, dan garis $x = 2$.

Alternatif Penyelesaian

Gambar 5.27

Daerah yang diarsir merupakan daerah yang dibatasi oleh garis $g(x) = 2 - x$, kurva $f(x) = x^2$, sumbu-x, sumbu-y, dan garis $x = 2$. Untuk menghitung luas daerahnya tidak bisa dengan menggunakan satu bentuk integral tentu, akan tetapi dua bentuk integral tentu. (mengapa ya? Coba lihat kembali daerah pada gambar dan berfikirlah).

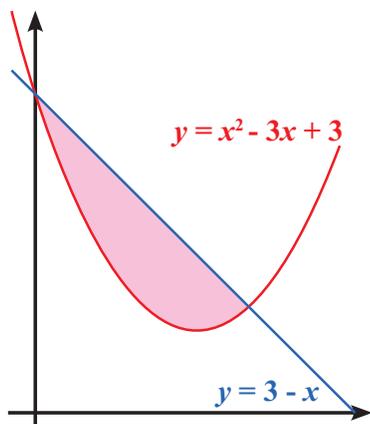
Luas daerah dibagi menjadi dua, yaitu luas daerah pada interval [0, 1] disebut A_1 dan luas daerah pada interval [1, 3] disebut A_2. Sehingga luas keseluruhannya adalah

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 \\ &= \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 2 - x\,dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 + \left[2x - \frac{1}{2}x^2\right]_1^2 \\ &= \frac{1}{3} - 0 + 2 - \frac{3}{2} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Jadi luas daerahnya adalah $\frac{5}{6}$ satuan luas.

Contoh 5.23

Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh $y = x^2 - 3x + 3$ dan $y = -2x - 3$.

Alternatif Penyelesaian

Gambar 5.28

Luas daerah yang dibatasi oleh $y = x^2 - 3x + 3$ dan $y = -2x - 3$ ditunjukkan pada daerah yang diarsir pada gambar disamping. Coba Anda amati dengan cermat gambar di samping. Mungkin Anda akan bertanya, berapa batas interval untuk gambar yang diarsir? Batas interval ini harus diketahui terlebih dahulu. Ini berarti harus dicari absis dari titik potong dua kurva tersebut.

Menentukan absis titik potong

$$y = y$$

$$x^2 - 3x + 3 = 3 - x$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

$$x = 0 \text{ atau } x = 2$$

Jadi batas interval daerah yang diarsir adalah [0, 2], sehingga luas daerah tersebut

$$L = \int_0^2 (3-x) - (x^2 - 3x + 3)\, dx$$

$$= \int_0^2 2x - x^2\, dx$$

$$= \left[x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^2$$

$$= \left(4 - \frac{8}{3} \right)$$

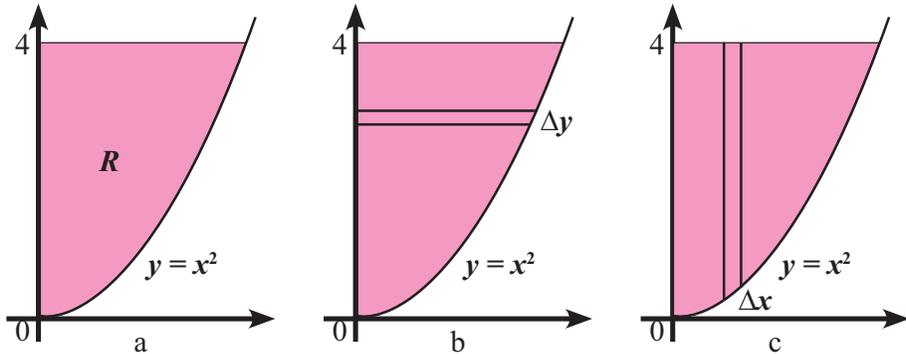
$$= \frac{4}{3}$$

Jadi luas daerah yang dibatasi oleh $y = x^2 - 3x + 3$ dan $y = -2x - 3$ adalah $\frac{4}{3}$ satuan luas.

Contoh 5.24

Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$, garis $y = 4$, $y = 0$ dan sumbu-y.

Alternatif Penyelesaian

Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$, garis $y = 4$, $y = 0$ dan sumbu-y ditunjukkan pada gambar 5.29.a berikut:

Gambar 5.29 Luas daerah yang dibatas $y = x^2$, $y = 4$, $y = 0$ dan sumbu-y

Jika diamati dari Gambar 5.29 b dan 5.29 c, ada dua cara untuk membuat partisi, yaitu mempartisi daerah dengan horisontal (mendatar) dan vertikal (tegak).

Dipartisi secara horisontal (Gambar 5.29 b)

Misalkan luas satu partisi ΔR, maka $\Delta R \approx \sqrt{y}\,\Delta y$ (mengapa?), sehingga

$R = \int_0^4 \sqrt{y}\, dy$ (mengapa batasnya 0 sampai 4?)

$$R = \int_0^4 \sqrt{y}\, dy = \left[\frac{2}{3} y\sqrt{y}\right]_0^4 = \frac{16}{3}$$

Dipartisi secara vertikal (Gambar 5.29 c)

Misalkan luas satu partisi ΔR, maka $\Delta R \approx (4 - x^2)\,\Delta x$ (mengapa?), sehingga

$R = \int_0^2 4 - x^2\, dx$ (mengapa batasnya 0 sampai 2?)

$$R = \int_0^2 4 - x^2\, dx = \left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

Jadi luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$, garis y = 4, y = 0 dan sumbu-y adalah $\frac{16}{3}$ satuan luas. Contoh 5.24 ini menunjukkan bahwa untuk menentukan luas daerah dapat dilakukan dua cara mempartisi, mempartisi secara horisontal dan vertikal. Tentunya dalam mempartisi daerah untuk menentukan luas, dipilih mana yang lebih praktis. Berdasarkan alternatif penyelesaian Contoh 5.24, disimpulkan bahwa untuk mempartisi daerah lebih praktis menggunakan partisi secara horizontal.

Contoh 5.25

Suatu tangki yang terisi penuh dapat menyimpan air sebanyak 200 liter. Tangki tersebut bocor dengan laju kebocoran $V'(t) = 20 - t$, dengan t dalam jam dan V dalam liter. Berapa liter jumlah air yang keluar antara 10 dan 20 jam saat kebocoran terjadi? Berapa lama waktu yang dibutuhkan agar tangki kosong?

Alternatif Penyelesaian

Misalkan $V(t)$ adalah jumlah air yang keluar karena bocor.

Jumlah air yang bocor antara 10 dan 20 jam adalah

$$V(20) - V(10) = \int_{10}^{20} V'(t)\, dt = \int_{10}^{20} 20 - t\; dt = \left[20t - \frac{1}{2}t^2\right]_{10}^{20}$$

= (400–200) – (200–50) = 200 – 150 = 50

Jadi jumlah air yang keluar karena bocor antara 10 dan 20 jam adalah 50 liter.

Saat tangki kosong, berarti jumlah air yang keluar adalah 200 liter, sehingga waktu yang dibutuhkan adalah:

$$V(t) = 200$$

$$20t - \frac{1}{2}t^2 = 200$$

$$\frac{1}{2}t^2 - 20t + 200 = 0$$

$$t^2 - 40t + 400 = 0$$

$$(t - 20)(t - 20) = 0$$

$$t = 20$$

Jadi dibutuhkan waktu 20 jam agar tangki tersebut kosong.

Contoh 5.26

Dalam bidang ekonomi, fungsi biaya marginal (*MC*) dirumuskan sebagai $MC = \frac{d}{dQ}TC$, dengan *TC* fungsi biaya total. Diketahui $MC = 2Q + 10$, jika barang diproduksi 15 unit, biaya totalnya 400, tentukan fungsi biaya totalnya.

Alternatif Penyelesaian

Oleh karena $MC = \frac{d}{dQ}TC$, maka $TC = \int MC\ dQ$, sehingga

$$TC = \int MC\ dQ = \int 2Q + 10\ dQ = Q^2 + 10Q + c$$

Untuk produksi 15 unit, biaya totalnya 400, sehingga Q

$$400 = (15)^2 + 10 \cdot 15 + c$$
$$c = 400 - 225 - 150$$
$$c = 25$$
$$TC = Q^2 + 10Q + 25$$

Jadi fungsi biaya total yang dimaksud adalah $Q^2 + 10Q + 25$

Contoh 5.27

Fungsi kecepatan dari suatu objek adalah $V(t) = \begin{cases} 3x \text{ jika } 0 \le t \le 1 \\ 3 \quad \text{jika } 0 \le t \le 6 \end{cases}$. Anggap objek berada pada titik (0, 0) pada saat $t = 0$, carilah posisi objek pada saat $t = 5$?

Alternatif Penyelesaian

Oleh karena $V(t) = \frac{ds}{dt}$, dengan s posisi maka $s = \int V(t)\ dt$, sehingga posisi benda pada saat $t = 5$ adalah:

$$s = \int_0^5 V(t)\,dt = \int_0^1 3x\,dt + \int_1^6 3\,dt = \left[\frac{3}{2}x^2\right]_0^1 + \left[3x\right]_1^6 = \frac{3}{2} + 18 - 3 = 16\frac{1}{2}$$

Jadi posisi objek pada saat $t = 5$ adalah $16\frac{1}{2}$ satuan

Anda telah mengamati dan mencermati penggunaan integral tentu dalam contoh 5.17 sampai dengan 5.25. Contoh-contoh tersebut terkait dengan luas daerah yang dibatasi oleh kurva. Tentunya selama mengamati contoh tersebut ada hal yang ingin Anda tanyakan. Mungkin saja salah satu dari pertanyaan Anda sebagai berikut:

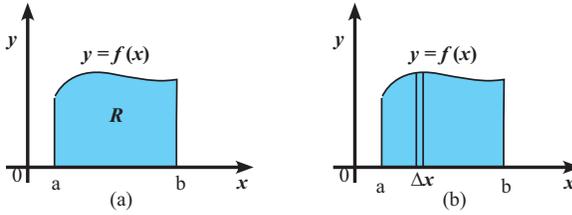
1. Bagaimana menentukan luas daerah yang terletak di bawah sumbu-x?
2. Jika diberikan fungsi $f(x)$, $g(x)$, garis $x = a$ dan $x = b$, bagaimana menentukan luas daerah yang dibatasi oleh $f(x)$, $g(x)$, garis $x = a$ dan $x = b$?
3. Bagaimana menentukan batas interval dari suatu daerah yang terbentuk dari dua kurva?

Nah, silahkan tulis pertanyaan Anda pada kotak berikut:

Setelah Anda mengajak siswa untuk mengamati masalah 5.17 sampai masalah 5.27, minta siswa untuk membuat pertanyaan. Harapannya adalah siswa menanyakan bagaimana menentukan luas dengan menggunakan integral. Pertanyaan-pertanyaan yang diharapkan muncul antara lain:

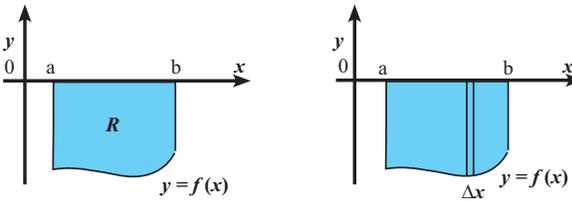
1. Bagaimana menentukan luas daerah yang terletak di atas sumbu-X?
2. Bagaimana menentukan luas daerah yang terletak di bawah sumbu-X?
3. Bagaimana memodelkan luas daerah dalam integral?
4. Kapan menggunakan partisi secara horisontal dan vertikal?

Ayo Menggali Informasi

Amati luas daerah yang disajikan dalam gambar-gambar berikut.

Gambar 5.30 Luas daerah di atas sumbu-x

Misalkan daerah yang terbentuk pada Gambar 5.30 dipartisi secara vertikal dengan panjang subinterval Δx dan titik sampel pada partisi $\bar{x}$. Karena titik sampel $\bar{x}$, maka tinggi partisi adalah $f(\bar{x})$. Misalkan ΔA menyatakan luas partisi, maka: $\Delta A \approx f(\bar{x})\Delta x$. Sehingga luas daerah pada Gambar 5.30 a adalah:

$$\text{Luas } R = \int_{...}^{...} ... \, dx$$

Untuk menentukan luas daerah di bawah sumbu-x, langkahnya serupa dengan menentukan luas daerah di atas sumbu-x. Perhatikan Gambar 5.31 berikut:

Gambar 5.31. Luas daerah di bawah sumbu-x

Ajak siswa untuk memahami bagaimana menentukan luas daerah jika:

1. batas interval diketahui dan daerah yang terbentuk di atas sumbu-X
2. batas interval diketahui dan daerah yang terbentuk di bawah sumbu-X
3. batas interval diketahui dan daerah terbentuk diantara dua kurva

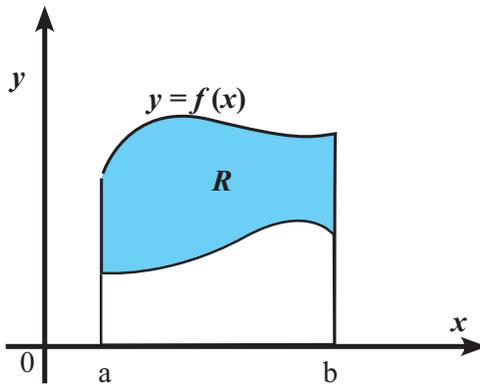
Minta siswa untuk melengkapi bagian yang kosong. Beri kesempatan kepada siswa untuk memahami.

Beberapa soal berikut dapat Anda berikan ke siswa untuk lebih memahami hasil yang diperoleh dari proses menggali informasi.

1. Sketsa dan arsirlah daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 4 - x^2$ dan sumbu X, kemudian tentukan luas daerah tersebut.
2. Sketsa dan arsirlah daerah yang dibatasi oleh garis $y = -2 - 2x$, sumbu X, garis $x = 1$, dan garis $x = 3$, kemudian tentukan luas daerah tersebut.
3. Sketsa dan arsirlah daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 2x^2$, $y = 4x - 2x^2$ sumbu Y dan garis $x = 2$

Misalkan daerah yang terbentuk pada Gambar 5.31 dipartisi secara vertikal dengan lebar partisi Δx dan titik sampel pada partisi $\bar{x}$. Karena titik sampel $\bar{x}$, maka tinggi partisi adalah $0 - f(\bar{x}) = -f(\bar{x})$ (ingat, sumbu-x sama artinya dengan $y = 0$). Misalkan ΔA menyatakan luas partisi, maka: $\Delta A \approx -f(\bar{x})\Delta x$. Sehingga luas daerah pada Gambar 5.31 a adalah:

$$\text{Luas } R = \int_{\dots}^{\dots} \dots \, dx$$

Sekarang bagaimana untuk menentukan luas daerah yang dibentuk dari dua kurva seperti Gambar 5.32 berikut?

Gambar 5.32. Luas daerah yang dibatasi oleh dua kurva

Misalkan daerah yang terbentuk pada Gambar 5.32 dipartisi secara vertikal dengan lebar partisi Δx dan titik wakil pada partisi $\bar{x}$.

Karena titik sampel $\bar{x}$, maka tinggi partisi adalah ...

Misalkan ΔA menyatakan luas partisi, maka: $\Delta A \approx$ ... Sehingga luas daerah pada Gambar 5.32 adalah:

$$\text{Luas } R = \int_{\dots}^{\dots} \dots \, dx$$

Anda telah mempelajari beberapa contoh tentang menentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva dengan menggunakan integral tentu. Lakukan analisa dari beberapa contoh di atas, kemudian cobalah untuk membuat prosedur menentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva. Beberapa pertanyaan berikut mungkin membantu Anda dalam membuat prosedur menentukan luas daerah.

1. Apakah sebaiknya perlu membuat sketsa daerah yang akan dicari luasnya?
2. Daerah yang akan dicari luasnya terletak di atas atau di bawah sumbu-x?
3. Apakah batas interval sudah ada? Jika belum ada bagaimana mencarinya?
4. Jika mempartisi daerah yang akan ditentukan luasnya, sebaiknya mempartisi secara horisontal atau vertikal?
5. Bagaimana memodelkan bentuk integral tentu untuk menentukan luas daerah?

Bersama dengan teman Anda, tulislah prosedur yang kalian buat.

Pertukarkan prosedur menentukan luas daerah yang Anda buat dengan teman yang lain. Amati dan cermati dengan seksama prosedur menentukan luas dearah yang dibuat oleh teman Anda. Secara santun, berilah masukan atau saran perbaikan kepada Anda. Kemudian mintalah pendapat teman Anda tentang prosedur menentukan luas yang telah Anda buat.

Ajak siswa untuk membuat prosedur menentukan luas daerah. Beri kesempatan kepada siswa untuk melihat kembali beberapa masalah yang telah dipelajari sebelumnya.

Ajak siswa untuk mempresentasikan prosedur menentukan luas daerah yang telah mereka buat. Latih siswa untuk menanggapi pertanyaan temannya dan latih siswa untuk bertanya secara santun. Jika dirasa diskusi sudah tidak terarah, Guru menjadi penengah. Diakhir pembelajaran berikan penguatan.

Latihan 5.3

1. Carilah luas daerah yang dibatasi oleh garis-garis $y = x$, dan $y = 4 - x$ dengan
   a. menggunakan rumus luas daerah yang dipelajari di geometri
   b. menggunakan integral.

2. Carilah luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 - 8$, dan garis-garis $y = 2x$, dan $y = -2x$.

3. a. Gambarlah grafik fungsi $y = \sin(x)$, $0 \le x \le 2\pi$ dan arsirlah daerah yang dibatasi oleh sumbu-x dan grafik fungsi y
   b. Seorang siswa menghitung luas daerah pada butir (a) sebagai berikut:

   $$\text{Luas} = \int_0^{2\pi} \sin(x)dx = \left[-\cos(x)\right]_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) - (-\cos(0))$$

   $= -1 - (-1) = 0.$

   Benar atau salah pekerjaan siswa tersebut? Beri alasan dari jawaban Anda.

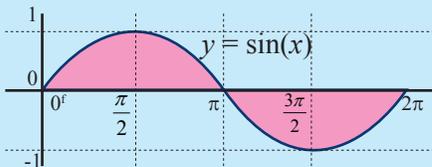
4. Gambar 1 berikut menunjukkan grafik fungsi f. Diketahui luas daerah A = 0,3, luas daerah B = 0,5, luas daerah C = 2,7, dan luas daerah D = 0,2. Hitunglah integral berikut berdasarkan gambar dan yang diketahui

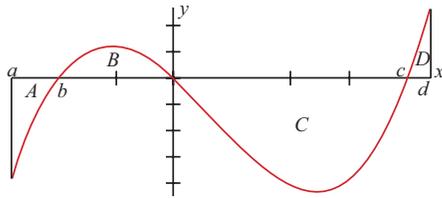
   (a) $\int_a^b f(x)dx$, (b) $\int_b^0 f(x)dx$, (c) $\int_0^c f(x)dx$, (d) $\int_c^d f(x)dx$

1. a. Luas daerah = 1 satuan luas

   b. Luas = $\int_1^2 x - 1\,dx + \int_2^3 3 - x\,dx = 1$ satuan luas

2. Luas daerah = $\dfrac{104}{3}$ satuan luas

3. a. grafik fungsi $y = \sin(x)$, $0 \le x \le 2\pi$ dan dibatasi sumbu-x

   b. salah, seharusnya: $\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x)\,dx = 4$

4. a. 0,3 b. 0,5 c. -2,7 d. 0,2

Gambar 1

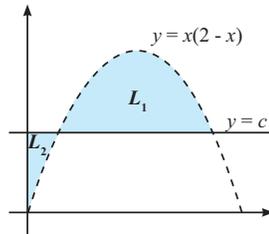
5. Carilah luas daerah yang dibatasi oleh parabola $y = -x^2 + 8x - 15$ dengan sumbu x.

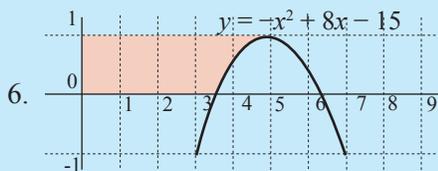
6. Carilah luas daerah yang dibatasi oleh parabola $y = -x^2 + 8x - 15$, garis singgung parabola yang melalui puncak parabola, dan sumbu-sumbu koordinat.

7. Carilah luas daerah yang dibatasi oleh parabola $y = x^2 + 4$, dan garis yang melalui titik $(-1, 5)$ dan $(2, 8)$.

8. Carilah luas daerah yang dibatasi oleh parabola $y = x^2 + 4$ dan garis singgung-garis singgung parabola yang melalui titik $(0, 0)$.

9. Diketahui garis singgung parabola $y = x^2 + ax + 4$ pada titik $x = 1$ membentuk sudut $\frac{\pi}{4}$ dengan sumbu-x. Carilah luas daerah yang dibatasi oleh garis $y = x + 4$ dan parabola tersebut.

10. Diberikan gambar grafik fungsi $y = x(2 - x)$ dan garis $y = c$. L_1 menyatakan daerah yang dibatasi oleh kedua grafik tersebut. Sedangkan L_2 menyatakan daerah yang dibatasi oleh kedua grafik tersebut dan sumbu-y. Tentukan nilai c sehingga luas daerah $L_1 = 2$ kali luas daerah L_2.

Gambar 2

5. Luas $= \int_3^5 -x^2 + 8x - 15\, dx = \frac{4}{3}$ satuan luas.

6.

Luas $= \frac{10}{3}$ satuan luas

7. Luas

$$= \int_{-1}^{2} x + 6 - x^2 - 4\, dx$$

$$= \int_{-1}^{2} -x^2 + x + 2\, dx$$

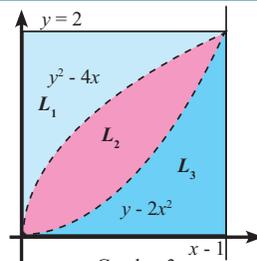
$$= \frac{9}{2}$$

Jadi luasnya $\frac{9}{2}$ satuan luas

8. Luas $= \frac{16}{3}$ satuan luas

9. Luas daerah $= \frac{4}{3}$ satuan luas.

10. $c = \frac{2}{3}$

11. Diberikan gambar grafik $y = 2x^2$ dan $y^2 = 4x$. L_2 menyatakan daerah yang dibatasi oleh kedua grafik tersebut. Sedangkan L_1 menyatakan daerah yang dibatasi oleh grafik $y^2 = 4x$, $y = 2$, dan sumbu-y. L_3 menyatakan daerah yang dibatasi oleh grafik $y = 2x^2$, $x = 1$, dan sumbu-x. Tentukan luas daerah L_1 dengan pengintegralan terhadap:

    a. variabel x b. variabel y.

    Kerjakan soal yang sama terhadap L_2 dan L_3.

Gambar 3

12. a. Gambarlah suatu daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$ dan garis $y = 9$.
    b. Tentukan koordinat titik potong antara kurva $y = x^2$ dan garis $y = c$, $0 < c < 9$, yang dinyatakan dalam c.
    c. Jika garis horizontal $y = c$ membagi daerah pada soal (a) sehingga perbandingan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$, $y = 9$, $y = c$ dengan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = c$, $y = x^2$ adalah 2 : 1, maka tentukanlah nilai c.

13. a. Gambarlah daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 2 - x^2$ dan $y = 2$
    b. Hitunglah luas daerah pada soal (a) dengan
       (i). Menggunakan pengintegralan terhadap variabel x
       (ii). Menggunakan pengintegralan terhadap variabel y

14. a. Gambarlah kurva $y = \sin x$ dan $y = \cos x$ dengan $0 \le x \le 2\pi$ pada diagram yang sama.
    b. Carilah luas daerah di kuadran I yang dibatasi oleh sumbu-y, $y = \sin x$, $y = \cos x$.
    c. Carilah luas daerah di kuadran I yang dibatasi oleh sumbu-x, kurva $y = \cos x$, dan kurva $y = \sin x$,

11. **Luas daerah L_1**

a. Dengan pengintegralan terhadap variabel x,

luas = $\int_0^1 2 - 2\sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}$

b. Dengan pengintegralan terhadap variabel y,

luas = $\int_0^2 \frac{1}{4} y^2\, dy = \frac{2}{3}$

Luas daerah L_2

a. Dengan pengintegralan terhadap variabel x,

luas = $\int_0^1 2\sqrt{x} - 2x^2\, dx = \frac{2}{3}$

b. Dengan pengintegralan terhadap variabel y,

luas = $\int_0^2 \frac{1}{2}\sqrt{2y} - \frac{1}{4} y^2\, dy = \frac{2}{3}$

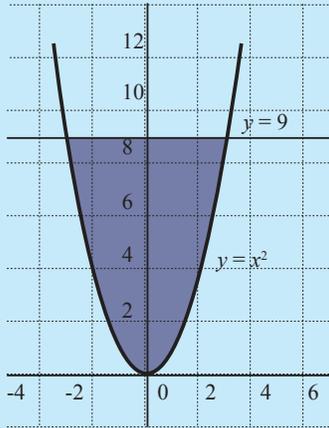
Luas daerah L_3

a. Dengan pengintegralan terhadap variabel x,

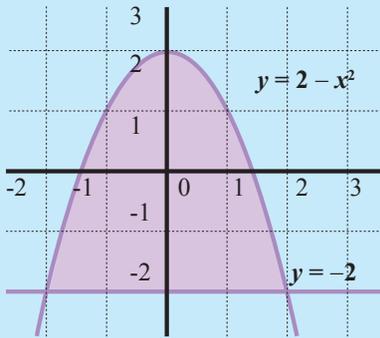
luas = $\int_0^1 2x^2\, dx = \frac{2}{3}$

b. Dengan pengintegralan terhadap variabel y,

luas = $\int_0^2 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2y}\, dy = \frac{2}{3}$

12. a.

b. koordinat titik potong: $(-\sqrt{c}, c)$ dan $(\sqrt{c}, c)$

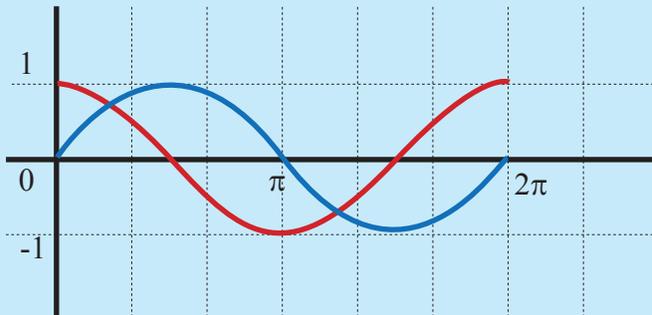
c. $c = 3\sqrt[3]{3}$

13. a.

b. dengan pengintegralan terhadap variabel x

Luas $= \int_{-2}^{2} -x^2 + 4 \; dx = 10\frac{2}{3}$ satuan luas

Dengan pengintegralan terhadap variabel y

Luas $= 2\int_{-2}^{2} \sqrt{2-y}\; dy = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}$

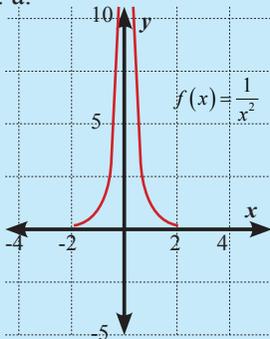
14. a.

b. Luas $= \int_{0}^{\pi/4} \cos x - \sin x \; dx = \sqrt{2} - 1$

c. Luas $= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin x - \cos x \, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \sin x \, dx = \sqrt{2} - 1 + 1 = \sqrt{2}$

15. a. $\int_0^1 \cos(\pi x)\,dx$

b.

16. a.

$f(x) = \frac{1}{x^2}$

b. Salah, karena berdasarkan gambar grafik fungsi pada (a) daerah yang terbentuk berada diatas sumbu-x sehingga luas daerah diatas sumbu-x dan dibatasi oleh grafik fungsi positif sama dengan integral tentu fungsi positif tersebut, jadi $\int_{-2}^{2} \frac{1}{x^2}\,dx$ nilainya positif.

17. $a = \frac{1}{3}$

19. $A = -6$, $B = 10$, $C = 2$

15. Nyatakan masing-masing limit berikut sebagai suatu integral

a. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n}\left(\cos(\frac{\pi}{n}) + \cos(\frac{2\pi}{n}) + \cos(\frac{3\pi}{n}) + \ldots + \cos(\frac{n\pi}{n})\right)$

b. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{n+1}{n^4} + \frac{n+2}{n^4} + \frac{n+3}{n^4} + \ldots + \frac{2n}{n^4}\right)$

16. Diketahui fungsi $f(x) = \frac{1}{x^2}$

a. Gambarlah grafik fungsi f untuk $-2 \le x \le 2, x \ne 0$.

b. Pak Budi menghitung nilai integral $\int_{-2}^{2} \frac{1}{x^2}\,dx$ sebagai berikut

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{x=-2}^{x=2} = -\frac{1}{2} - (-\frac{1}{-2}) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1.$$

Menurut pendapatmu, benar atau salahkah pekerjaan Pak Budi ? Jelaskan jawabanmu ! (**Petunjuk** : gunakan gambar pada (a))

17. Carilah semua nilai positif a yang memenuhi persamaan

$$\int_0^a (4x^3 + 6x + 5)\,dx = a^4 + 2.$$

18. Carilah semua nilai a di interval $[0, 4\pi]$ yang memenuhi persamaan

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{a} \cos x\,dx = \sin 2\alpha.$$

Soal-soal Pengayaan

19. Carilah nilai-nilai A, B, dan C sedemikian sehingga fungsi $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ memenuhi $f(2) = -2$, $f(1) + f^{1}(1) = 4$, $\int_0^1 f(x)\,dx = 5$.

20. Carilah nilai-nilai A, B, dan C sedemikian sehingga fungsi $f(x) = \frac{Ax^2 + Bx}{x+1} + Cx^2$ memenuhi $f(-2) = 12$, $f'(0) = 2$, dan $\int_0^2 (x+1) f(x)dx = 1$.

21. Carilah semua nilai a yang memenuhi pertidaksamaan

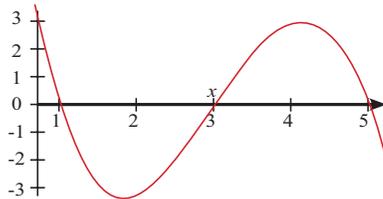
$$\int_1^a \left(\tfrac{3}{2}x + 2\right) dx > -\frac{15}{4}.$$

22. Tentukan $\int_0^4 |x-3|\,dx$

23. Diketahui fungsi f yang didefinisikan sebagai berikut

$$f(x) = \begin{cases} |x-3|, & x \geq 0, \\ x+3, & x < 0 \end{cases}$$

Tentukan (a) $\int_0^4 f(x)\,dx$, (b) $\int_{-4}^4 f(x)\,dx$

24. Perhatikan gambar grafik fungsi f berikut

Berdasarkan gambar di atas, urutkanlah nilai $\int_1^2 f(x)dx$, $\int_1^3 f(x)dx$, $\int_1^4 f(x)dx$, dan $\int_1^5 f(x)dx$, mulai dari nilai terkecil sampai dengan nilai terbesar.

20. $A = -\frac{7}{4}, B = 2, C = \frac{1}{4}$

21. $\{a \mid (-\infty, -2) \cup (-\frac{2}{3}, \infty), a \in R\}$

22. $\int_0^4 |x-3|\,dx = 5$

Petunjuk: Gunakan konsep luas segitiga.

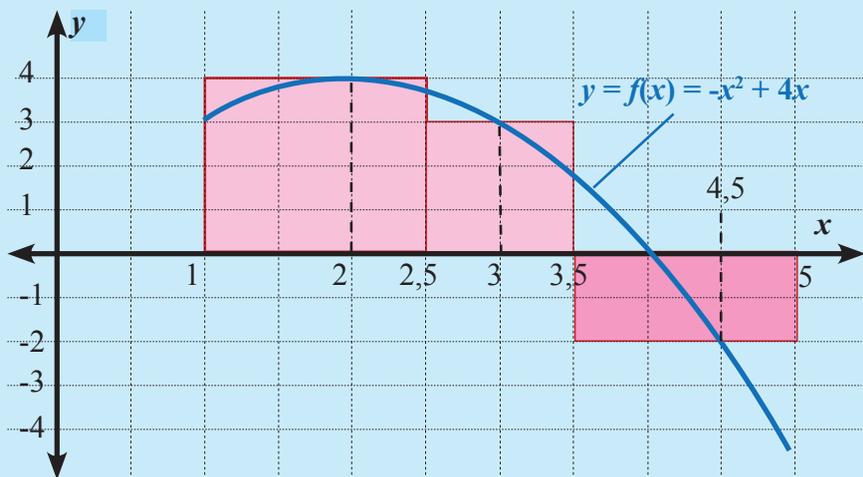
23. a. 20

b. 40

Petunjuk: Gunakan konsep luas trapesium.

24. $\int_1^3 f(x)dx$, $\int_1^4 f(x)dx$, $\int_1^2 f(x)dx$, $\int_1^5 f(x)dx$

Uji Kompetensi 5.1

1. Tentukan jumlah Riemann yang ditunjukan oleh gambar berikut:

2. Tentukan jumlah Rieman $\sum_{i=1}^{n} f\left(\bar{x}_i\right)\Delta x_i$ bila diberikan data-data sebagai berikut:

   $f(x) = x - 1$, batas-batas subintervalnya adalah $3 < 3{,}75 < 4{,}25 < 5{,}5 < 6 < 7$,
   $\bar{x}_1 = 3, \bar{x}_2 = 4, \bar{x}_3 = 4{,}75, \bar{x}_4 = 6, \bar{x}_5 = 6{,}5$

3. Gunakan nilai-nilai a dan b yang diberikan dan nyatakan limit yang diberikan sebagai integral tentu:

   a. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\bar{x}_i\right)^3 \Delta x_i; a = 1, b = 3$

   b. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\sin \bar{x}_i\right)^2 \Delta x_i; a = 0, b = \pi$

4. Tentukan integral tentu berikut menggunakan definisi integral Riemann.

   a. $\int_0^2 \left(x^2 + 1\right) dx$

   b. $\int_{-10}^{10} \left(x^2 + x\right) dx$

5. Tentukan $\int_a^b f(x)\,dx$, dimana a dan b merupakan batas kiri dan batas kanan dimana fungsi f didefinisikan. Misal diberikan fungsi $f(x) = 4 - |x|$ didefiniskan pada interval $-4 \le x \le 4$ (petunjuk: gambar grafik fungsinya dan gunakan rumus bangun datar yang sesuai)

6. Jika $F'(x) = 8x - 2$ dan $F(5) = 36$, maka $F(x) = ...$

7. Jika $f(x) = \int 3x^2 - 2x + 5\ dx$ dan $f(1) = 0$, maka $f(x) = ...$

8. Tentukan $\int \sin^3 x \cos x\, dx$

9. Jika $f(x) = \int 2ax + (a-1)\,dx$, $f(1) = 3$ dan $f(2) = 0$, maka nilai a adalah …

10. Nilai $a > 0$ yang memenuhi $\int_0^a 2x - 1\ dx = 6$ adalah …

11. Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 + 6x + 5$ dan sumbu x adalah …

12. Luas daerah yang dibatasi oleh parabola $y = x^2$ dan garis $y = 2x + 3$ adalah …

13. Diberikan $f(x) = a + bx$ dan $F(x)$ adalah anti turunan $f(x)$. Jika $F(1) - F(0) = 3$, maka $2a + b$ adalah … (*SNMPTN 2011*)

14. Jika $\int_1^4 f(x)\,dx = 6$, maka $\int_1^4 f(5-x)dx = \ldots$

15. Daerah yang dibatasi oleh garis $3y = x$ dan $y = \sqrt{x}$ pada $0 \le x \le m, \mathrm{m} > 0$ terdiri dari dua bagian. Agar kedua bagian daerah tersebut mempunyai luas yang sama, maka m= … (*SIMAK UI 2009*)

1. $R_P = f(2)(2,5-1) + f(3)(3,5-2,5) + f(4,5)(5-3,5)$

$$= 4(1,5) + 3(1) + (-2,25)(1,5) = 5,625$$

2. Jumlah Riemann

$$\sum_{i=1}^{5} f(\bar{x}_i)\Delta x_i = f(3)(3,75-3) + f(4)(4,25-3,75) + f(4,75)(5,5-4,25)$$

$$+ f(6)(6-5,5) + f(6,5)(7-6)$$

$$= 2(0,75) + 3(0,5) + 3,75(1,25)5(0,5) + 5,5(1) = 15,6875$$

3. a. $\int_1^3 x^3 dx$ b. $\int_0^\pi (\sin x)^2 \, dx$

4.

a. $\Delta x = \frac{2}{n}, \bar{x}_i = \frac{2i}{n}$

$$f(\bar{x}_i) = \left(\frac{2i}{n}\right)^2 + 1 = \frac{4i^2}{n^2} + 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\left[1 + i^2\left(\frac{4}{n^2}\right)\right]\frac{2}{n}$$

$$= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{2}{n}(n) + \frac{8}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$= 2 + \frac{4}{3}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\int_0^2 (x^2+1)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left[2 + \frac{4}{3}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\right] = \frac{14}{3}$$

b. $\Delta x = \frac{20}{n}, \bar{x}_i = -10 + \frac{20i}{n}$

$$f\left(\bar{x}_i\right) = \left(-10 + \frac{20i}{n}\right)^2 + \left(-10 + \frac{20i}{n}\right) = 90 - \frac{380i}{n} + \frac{400i^2}{n^2}$$

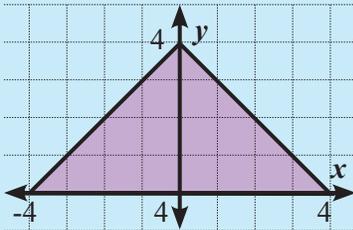
$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\bar{x}_i\right)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\left[90 - i\left(\frac{380}{n}\right) + i^2\left(\frac{400}{n^2}\right)\right]\frac{20}{n}$$

$$= \frac{20}{n}\sum_{i=1}^{n} 90 - \frac{7600}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{8000}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= 1800 - \frac{1800}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] + \frac{8000}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$= 1800 - 3800\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{4000}{3}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\int_{-10}^{10}\left(x^2 + x\right)dx = \lim_{n\to\infty}\left[1800 - 3800\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{4000}{3}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\right] = \frac{2000}{3}$$

5. Luas daerah dibawah kurva sama dengan luas segitiga:

$$\int_{-4}^{4} f(x)\,dx = \frac{1}{2}.8.4 = 16$$

6. $F(x) = \int 8x - 2\,dx = 4x^2 - 2x + c$

$F(5) = 36, maka\ c = -54$

$jadi\ F(x) = 4x^2 - 2x - 54$

7. $f(x) = \int 3x^2 - 2x + 5\,dx = x^3 - x^2 + 5x + c$

$f(1) = 0, maka\ c = -5$

$jadi\ f(x) = x^3 - x^2 + 5x - 5$

8. misalkan $u = \sin x$.

$du = \cos x\, dx$, sehingga

$$\int \sin^3 x \cos x\; dx = \int u^3\, du = \frac{1}{4}u^4 + c = \frac{1}{4}\sin^4 x + c$$

9. $f(x) = \int 2ax + (a-1)\, dx\; = ax^2 + ax - x + c$

$f(1) = 3$, maka $2a + c = 4$

$f(2) = 0$, maka $6a + c = 2$

dengan menggunakan eliminasi diperoleh $a = -\dfrac{1}{2}$

10. $\int_0^a 2x - 1\; dx = 6$

$\left[x^2 - x\right]_0^a = 6$

$a^2 - a = 6$

$a^2 - a - 6 = 0$

$(a-3)(a+2) = 0$

$a = 3$ atau $a = -2$

Jadi nilai $a > 0$ yang memenuhi adalah $a = 3$

11. Luas = $-\int_{-5}^{-1} x^2 + 6x + 5\, dx = 10\dfrac{2}{3}$ satuan luas

12. Luas = $\int_{-1}^{3} 2x + 3 - x^2\; dx = 10\dfrac{2}{3}$ satuan luas

13. $F(1) - F(0) = 3$

$\int_0^1 a + bx\, dx = 3$

$\left[ax + \dfrac{1}{2}bx^2\right]_0^1 = 3$

$a + \dfrac{1}{2}b = 3 \qquad \Rightarrow \qquad 2a + b = 6$

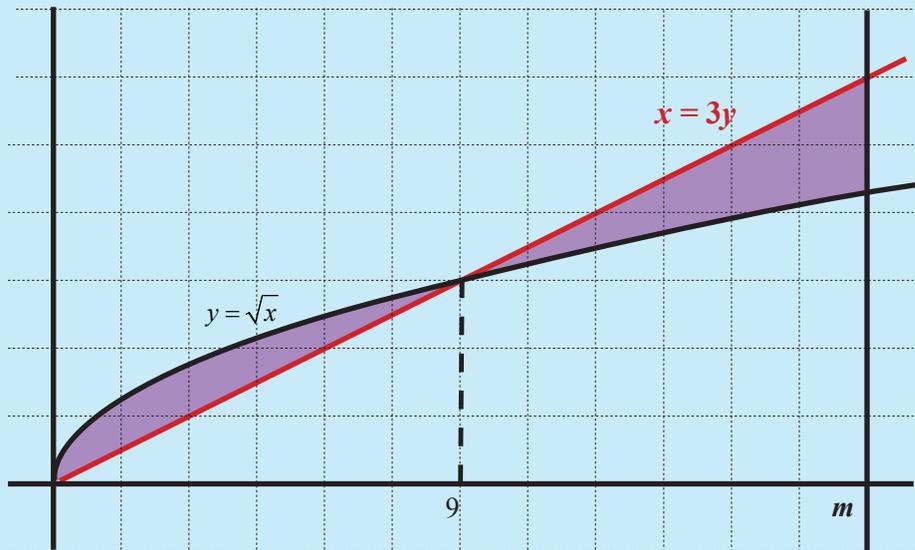
14. Diketahui $\int_1^4 f(x)\,dx = 6$

Misal $t = 5 - x \Rightarrow dt = -\,dx$

$x = 1 \Rightarrow t = 4$

$x = 4 \Rightarrow t = 1$

$$\int_1^4 f(5-x)\,dx = \int_4^1 f(t)(-dt) = -\int_4^1 f(t)\,dt = \int_1^4 f(t)dt = 6$$

15.

Luas I = Luas II

$$\int_0^9 \sqrt{x} - \frac{1}{3}x\,dx = \int_9^m \frac{1}{3}x - \sqrt{x}\,dx$$

$$\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{6}x^2\right]_0^9 = \left[\frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_9^m$$

$$18 - \frac{27}{2} = \frac{1}{6}m^2 - \frac{2}{3}m\sqrt{m}$$

$$\frac{9}{2} = \frac{1}{6}m^2 - \frac{2}{3}m\sqrt{m}$$

$m_1 = 0,\ m_2 = 16$

Karena $m > 0$, maka $m = 16$

Contoh Instrumen Penilaian

Glosarium

Daftar Pustaka

Instrumen Penilaian Sikap

Lembar ini diisi oleh guru untuk menilai sikap peserta didik selama mengikuti pembelajaran. Berilah tanda centang (√) pada kolom skor sesuai sikap yang ditampilkan oleh peserta didik, dengan kriteria sebagai berikut:

Skor 4 : selalu, apabila selalu melakukan sesuai indikator

Skor 3 : sering, apabila sering melakukan sesuai indikator dan kadang-kadang tidak melakukan

Skor 2 : kadang-kadang, apabila kadang-kadang melakukan dan sering tidak melakukan

Skor 1 : tidak pernah, apabila tidak pernah melakukan

Nama Peserta : ________________________________

Tanggal Pengamatan : ________________________________

Materi Pokok : ________________________________

Tabel Instrumen Penilaian Sikap

No	Aspek Pengamatan dan indikator	Skor				Keterangan
		1	2	3	4	
1	Sikap Spiritual					
	• Berdoa sebelum dan sesudah proses KBM					
	• Memberi salam pada saat awal dan akhir KBM sesuai dengan agama yang dianutnya					
2	Sikap Kejujuran					
	• Tidak menyontek dalam mengerjakan ujian/ulangan					
	• Tidak melakukan plagiasi dalam mengerjakan setiap tugas					
	• Melaporkan data atau informasi apa adanya					
3	Sikap Disiplin					
	• Datang tepat waktu					
	• Mengumpulkan tugas tepat waktu					
	• Membawa buku pelajaran dan buku-buku terkait pembelajaran					
	• Tertib dalam mengikuti pembelajaran					

No	Aspek Pengamatan dan indikator	Skor				Keterangan
		1	2	3	4	
4	Sikap Tanggungjawab					
	• Melaksanakan tugas individu dengan baik					
	• Mengakui kelebihan dan kekurangan orang lain					
5	Sikap Sosial, Toleransi dan Sopan Santun					
	• Tidak mengganggu teman yang berbeda pendapat					
	• Menerima kesepakatan meskipun berbeda pendapat					
	• Terlibat aktif dalam diskusi kelompok					
	• Suka membantu teman jika mengalami kesulitan					
	• Menyampaikan pendapat dengan santun					
	• Mengucapkan terima kasih setelah menerima bantuan orang lain					
Jumlah Skor						

Petunjuk Penskoran:

Skor akhir menggunakan skala 1 sampai 4. Perhitungan skor akhir (SA) menggunakan rumus:

$$SA = \frac{\text{Skor diperoleh}}{\text{Skor maksimal}} \times 4$$

Konversi skor akhir

Sangat Baik : apabila $3,33 < SA \leq 4,00$

Baik : apabila $2,33 < \text{skor} \leq 3,33$

Cukup : apabila $1,33 < \text{skor} \leq 2,33$

Kurang : apabila $\text{skor} \leq 1,33$

Instrumen Penilaian Sikap Sosial

(Lembar Penilaian Antar Peserta Didik)

Petunjuk Umum

1. Instrumen penilaian sikap sosial ini berupa Lembar Penilaian Antar Peserta Didik.
2. Instrumen ini diisi oleh PESERTA DIDIK untuk menilai PESERTA DIDIK LAIN/TEMANNYA.

Petunjuk Pengisian

1. Berdasarkan perilaku teman kalian selama dua minggu terakhir, nilailah sikap temanmu dengan memberi tanda centang (√) pada kolom skor 4, 3, 2, atau 1 pada Lembar Penilaian Antar Peserta Didik dengan ketentuan sebagai berikut:

   4 = apabila SELALU melakukan perilaku yang dinyatakan

   3 = apabila SERING melakukan perilaku yang dinyatakan

   2 = apabila KADANG-KADANG melakukan perilaku dinyatakan

   1= apabila TIDAK PERNAH melakukan perilaku yang dinyatakan

Kolom SKOR AKHIR dan KETUNTASAN diisi oleh guru.

LEMBAR PENILAIAN ANTAR PESERTA DIDIK

Nama Peserta didik yang dinilai :
Nomor Urut/Kelas :
Semester :
TahunPelajaran :
Hari/Tanggal Pengisian :
Butir Nilai : Menunjukkan rasa ingin tahudan sikap santun dalam menggali informasi tentang Menentukan Invers Matriks
Indikator Sikap :

1. Menggunakan bahasa yang baik saat berkomunikasi secara lisan dengan teman.
2. Tidak menyela pembicaraan pada saat berkomunikasi secara lisan dengan teman.

Sikap	Pernyataan	Skor				Perolehan Skor	Skor Akhir	Tuntas/ Tidak Tuntas
		1	2	3	4			
Santun	1. Temanku menggunakan bahasa yang baik saat berkomunikasi secara lisan dengan teman.							
	2. Temanku tidak menyela pembicaraan pada saat berkomunikasi secara lisan dengan teman.							
Jumlah								

Instrumen Penilaian Pengetahuan

Mata Pelajaran : Matematika
Kelas : XII
Materi : Matriks

Kompetensi Dasar	Indikator	Teknik Penilaian	Butir Soal	Kunci Jawaban	Skor
3.1 Menganalisis konsep, nilai determinan dan sifat operasi matriks serta menerapkannya dalam menentukan invers matriks dan dalam memecahkan masalah.	Mampu menentukan determinan	Tes Tulis	Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ dan $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tentukan Bilangan λ yang memenuhi $\det(A - \lambda I) = 0$		
			Pada matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & c \end{bmatrix}$, jika bilangan positif 1, a, c membentuk barisan geometri berjumlah 13 dan bilangan positif 1, b, c membentuk barisan aritmetika, tentukan		
	Mampu menerapkan sifat determinan dalam menyelesaikan masalah	Tes Tulis	Matriks $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ dan $G = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ memiliki det (FG) = 70. Tentukan nilai dari $3a + 7$		

$$\text{Nilai peserta didik} = \frac{\text{Skor yang diperoleh peserta didik}}{\text{Skor total}} \times 100$$

Saran Penilaian Pengetahuan

Untuk mengetahui pemahaman peserta didik tentang determinan matriks, sifat determinan, invers matriks dan penerapan matriks dalam kehidupan sehari-hari , Anda dapat memberikan tes kepada peserta didik. Anda dapat memberi tes tertulis dan tes lisan.

A. ***Contoh soal Tes Tertulis***

Topik Bahsan: determinan matriks, invers dan penerapannya dalam kehidupan sehari-hari.

Kompetensi Dasar 3.1 Menganalisis konsep, nilai determinan dan sifat operasi matriks serta menerapkannya dalam menentukan invers matriks dan dalam memecahkan masalah.	
Indikator: Mampu menentukan determinan	
Contoh Soal Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ dan $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tentukan Bilangan λ yang memenuhi $\det(A - \lambda I) = 0$ (*SNMPTN 2008 Wilayah Barat*).	Keterangan. Soal disamping dapat digunakan untuk mengukur pemahaman siswa tentang operasi matriks dan determinan matriks
Indikator: Menentukan invers dan determinan matriks	
Contoh Soal Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -17 & 0 \end{bmatrix}$. Jika A^T = transpose matriks A dan $AX = B + A^T$, Tentukan determinan matriks X.	Keterangan. Soal disamping dapat digunakan untuk mengukur pemahaman siswa tentang penggunaan sifat invers dalam memecahkan masalah (menentukan determinan).
Indikator: Menerapkan invers matriks dalam memecahkan masalah sehari-hari	
Contoh Soal Radin dan Aira bekerja pada sebuah perusahaan sepatu. Radin dapat membuat tiga pasang sepatu setiap jam dan Aira dapat membuat empat pasang sepatu setiap jam. Jumlah jam bekerja Radin dan Aira 16 jam sehari, dengan banyak sepatu yang dapat dibuat 55 pasang. Jika banyaknya jam bekerja keduanya tidak sama, a. Buatlah model matematika dari soal tersebut dalam bentuk matriks. b. Tentukan lama bekerja Radin dan Aira.	Keterangan. Soal disamping dapat digunakan untuk mengukur pemahaman siswa tentang penerapan konsep matriks dalam masalah sehari-hari.

Beberapa contoh soal di atas dapat Anda ubah sesuai dengan kebutuhan. Anda perlu memperhatikan jumlah soal dalam tes tertulis, sebaiknya disesuaikan dengan waktu dan tingkat kesulitan soal. Anda dapat membuat soal lain yang mengacu pada ketercapaian KD atau indikator.

B. Contoh Tes Lisan

Tes lisan dapat Anda gunakan untuk mengukur pemahaman dan pengetahuan peserta didik tentang determinan matriks, sifat determinan, invers matriks dan penerapan matriks dalam kehidupan sehari-hari. Beberapa hal yang perlu Anda perhatikan dalam membuat tes lisan diantaranya:

1. Buatlah soal yang mengacu pada ketercapaian KD atau indikator,
2. Tanyakan kepada peserta didik strategi apa yang akan mereka gunakan dan mengapa memilih strategi tersebut.
3. Tanyakan kepada peserta didik adakah strategi lain.
4. Jika peserta didik menemukan jawaban, tanyakan apakah jawaban tersebut merupakan jawaban satu-satunya.
5. Jika peserta didik kesulitan menemukan jawaban, berilah scafolding dengan memberi pertanyaan-pertanyaan yang membantu siswa mengatasi kesulitan.

Berikut contoh soal dan contoh pertanyaan yang digunakan untuk mengetahui sejauh mana peserta didik dapat menerapkan determinan matriks 2x2 beserta sifatnya.

Contoh Soal

Tentukan $a + b$ jika diketahui $\begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & d \\ e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ dan $cf - de = -2$

Berikut beberapa contoh pertanyaan lisan yang dapat disampaikan ke peserta didik.

1. Bagaimana Anda (peserta didik) menyelesaikan masalah tersebut? Strategi apa yang Anda gunakan?
2. Apa alasan Anda menggunakan strategi tersebut?
3. Adakah strategi lain?
4. Apakah a dan b unik?
5. Ada berapa banyak pilihan a dan b?
6. Berapakah nilai terkecil dari a dan b?

Intrumen Penilaian Projek

Petunjuk:

1. Kerjakan tugas ini secara berkelompok. Anggota tiap kelompok paling banyak 3 orang.
2. Lakukan pengamatan terhadap benda/kejadian/ sesuatu di sekitarmu Siapkan lembaran atau format untuk mencatat hasil pengamatanmu. Terhadap setiap benda/kejadian/sesuatu yang kalian amati, kumpulkan data tentang: (1) pola keteraturan yang terjadi dan (2) tentukan rumus suku ke-n.
3. Buatlah laporan secara tertulis tentang kegiatan yang dilakukan sejak perencanaan, pelaksanaan dan hasil yang diperoleh.
4. Laporan mencakup komponen: (a) tujuan kegiatan (b) persiapan (c) pelaksanaan, (d) hasil yang diperoleh, (e) kesan dan pesan terhadap tugas.
5. Laporan memuat hal-hal berikut ini: (a) Penyajian data yang diperoleh, (b) Laporan dipresentasikan atau dipamerkan.
6. Laporan dikumpulkan paling lambat empat minggu setelah diberikan tugas projek ini.

Rubrik Penilaian Projek

Skor	Kriteria
4	• Menunjukkan keakuratan yang tinggi dalam pengamatan kejadian/benda; • Kejelasan atau keterangan jawaban sangat lengkap; • Kerjasama kelompok sangat baik; • Penggunaan strategi benar dan tepat; • Kerapian penyajian sangat baik.
3	• Menunjukkan keakuratan yang tinggi dalam pengamatan kejadian/benda; • Kejelasan atau keterangan jawaban cukup lengkap; • Kerjasama kelompok cukup baik; • Penggunaan strategi benar dan tepat; • Kerapian penyajian cukup baik.
2	• Menunjukkan keakuratan yang sedang dalam pengamatan kejadian/benda; • Kejelasan atau keterangan jawaban kurang lengkap; • Kerjasama kelompok cukup baik; • Penggunaan strategi kurang tepat; • Kerapian penyajian cukup baik.
1	• Menunjukkan keakuratan yang kurang dalam pengamatan kejadian/benda; • Kejelasan atau keterangan jawaban kurang lengkap; • Kerjasama kelompok kurang baik; • Penggunaan strategi tidak benar dan kurang tepat; • Kerapian penyajian kurang baik.
0	Tidak melakukan tugas proyek

Tabel Penilaian Projek Matematika

No.	Kriteria	Kelompok							
		1	2	3	4	5	6	7	8
1.	Keakuratan pengukuran								
2.	Kejelasan atau keterangan jawaban lengkap								
3.	Kerjasama dengan sesama anggota kelompok								
4.	Penggunaan strategi benar dan tepat								
5.	Kerapian								
	JUMLAH SKOR								

Perhitungan nilai akhir kompetensi ketrampilan, sebagai berikut:

$$\text{Nilai Akhir} = \frac{\text{Perolehan Skor}}{\text{Total Skor Maksimal}} \times 4$$

Intrumen Penilaian Portofolio

Teknik penilaian portofolio di dalam kelas memerlukan langkah-langkah sebagai berikut:

a. Pendidik perlu menjelaskan kepada peserta didik bahwa portofolio tidak hanya merupakan kumpulan hasil kerja peserta didik yang digunakan oleh pendidik untuk penilaian, tetapi digunakan juga oleh peserta didik sendiri untuk refleksi. Dengan melihat portofolionya peserta didik dapat mengetahui perkembangan kemampuan, keterampilan, dan minatnya. Proses ini tidak akan terjadi secara spontan, tetapi membutuhkan waktu bagi peserta didik untuk belajar meyakini hasil penilaian mereka sendiri.
b. Pendidik bersama peserta didik menentukan sampel-sampel hasil pekerjaan apa saja yang akan dibuat. Dapat pula disepakati untuk dipilih beberapa sampel hasil kerja yang terbaik untuk dinilai. Portofolio peserta didik yang satu dan yang lain bisa sama bisa pula berbeda.
c. Pendidik bersama peserta didik mengumpulkan dan menyimpan karya-karya tiap peserta didik dalam satu map atau folder di sekolah.
d. Pendidik bersama peserta didik memberi tanggal pembuatan pada setiap hasil kerja peserta didik sehingga dapat diketahui perkembangannya dari waktu ke waktu.
e. Pendidik merumuskan deskripsi pencapaian kompetensi keterampilan pesera didik.

Penilaian portofolio dilakukan setiap akhir semester.Pelaksanaan penilaian portofolio, harus memenuhi beberapa kriteria berikut:

1. Melaksanakan proses pembelajaran terkait dengan pengumpulan tugas-tugas keterampilan.
2. Melakukan penilaian portofolio berdasarkan kriteria penilaian yang telah ditetapkan atau disepakati bersama dengan peserta didik, dengan memilih beberapa hasil terbaik dari sejumlah hasil pekerjaan yang dikumpulkan.
3. Meminta peserta didik mencatat hasil penilaian portofolionya untuk bahan refleksi dirinya.
4. Mendokumentasikan hasil penilaian portofolio sesuai format yang telah ditentukan.
5. Memberi umpan balik terhadap karya peserta didik secara berkesinambungan dengan cara memberi keterangan kelebihan dan kekurangan karya tersebut, caramemperbaikinya dan diinformasikan kepada peserta didik.
6. Memberi identitas (nama dan waktu penyelesaian tugas), mengumpulkan dan menyimpan portofolio masing-masing dalam satu map di sekolah
7. Memberikan kesempatan kepada peserta untuk memperbaiki pekerjaannya jika nilainya belum memuaskan.
8. Membuat “kontrak” atau perjanjian dengan peserta didik mengenai jangka waktu perbaikan dan penyerahan hasil pekerjaan perbaikan.
9. Memamerkan dokumentasi kinerja dan atau hasil karya terbaik portofolio di kelas
10. Mendokumentasikan dan menyimpan semua portofolio ke dalam map yang telahdiberi identitas masing-masing peserta didik untuk bahan laporan kepada sekolah danorang tua.
11. Mencantumkan tanggal pembuatan pada setiap hasil pekerjaan pesertadidik, sehingga dapat diketahui perkembangan kompetensi keterampilan peserta dari waktu ke waktu untuk bahanlaporan kepada sekolah dan atau orang tua.
12. Memberikan nilai akhir portofolio masing-masing peserta didik disertai dengan umpan balik.

Instrumen Penilaian Keterampilan

Mata Pelajaran : Matematika
Kelas : XII
Nama Projek : Membuat Paper Menentukan Determinan Matriks 4x4 dan Sifat-Sifatnya.
Alokasi Waktu :

Petunjuk: Berilah skor yang sesuai dengan Paper yang dibuat oleh peserta didik
Skor 4 : Kategori Sangat baik
Skor 3 : Kategori Baik
Skor 2 : Kategori Cukup
Skor 1 : Kategori Kurang

Nama Peserta Didik/Kelompok :
Tabel Instrumen Penilaian Keterampilan

No	Aspek dan Deskriptor	Skor (1 – 4)
1	Tata Bahasa	
	• Menggunakan bahasa Indonesia dengan baik dan benar	
	• Ketepatan penggunaan istilah dan simbol	
2	Proses Menemukan Determinan 4x4	
	• Dapat menentukan minor dan kofaktor matriks 4x4	
	• Dapat menemukan rumus umum determinan matriks 4x4	
	• Dapat memberikan contoh menentukan determinan matriks 4x4	
	• Dapat menemukan sifat determinan matriks 4x4 (skor 1 jika menemukan 1 sifat, skor 2 jika menemukan 2 sifat, skor 3 jika menemukan 3 sifat, skor 4 jika menemukan lebih dari 4 sifat).	
	• Dapat membuktikan sifat-sifat determinan matriks 4x4 yang ditemukan.	
	• Dapat memberikan contoh terkait sifat-sifat determinan 4x4	
3	Penyajian	
	• Jenis huruf mudah dibaca	
	• Ukuran huruf sesuai	
	• Paper disajikan dengan rapih	

Petunjuk Penilaian

$$\text{Nilai Projek} = \frac{\text{Skor diperoleh}}{\text{Skor maksimal}} \times 100$$

Daftar Pustaka

Anton, H. Dan Rorres, C. 2004. *Aljabar Linear Elementer, Versi Aplikasi, terjemahan*. Jakarta: Erlangga

Bittinger, L.M., 2010, *Elementary and Intermediate Algebra*, Boston : Pearson Eduation, Inc.

Goenawan, J. 1997. 100 *Soal dan Pembahasan Dimensi Tiga untuk Sekolah Menengah Umum*. Jakarta: PT Gramedia Widiasarana Indonesia

Herawati, Tri Dewi &. N.D. *Matematika*. PT Grafindo Media Pratama.

Hirsch, Christian R., dkk. 2008. *Core-Plus Mathematics Contemporary Mathematics in ContextCourse 1 Student Edition.* New York: Mc Graw Hill.

Hosch, W.L. 2011. *The Britannica Guide to Geometry.* New York : Britannica Educational Publishing

Larson, R. and Boswell, L. *Big Ideas Math Advanced 1*. California

Murdock, Jerald; Kamischke, Ellen; and Kamischke, Eric. 2007. *Discovering Algebra, an Investigative Approach*. Key Curriculum Press.

Peraturan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan nomor 103/2014, tentang *Proses Pembelajaran*

Peraturan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan nomor 104/2014, tentang *Pelaporan Hasil Penilaian*

Purcell, E.J. dan Varberg, Dale. 1987. *Calculus with Analytic Geometry, 5th Edition*. Prentice Hall, Inc.

Verberg, D., E. J. Purcell, and S. E. Steven. 2007. *Calculus* 9th. NJ: Pearson Education

Vollmar, Pamela, Edward Kemp . 2008. *Mathematics for The International Student*. Haese & Harris Publications.

Sumber-sumber internet :

1. *http//www.dreamstime.com* (Tanggal unduh 11 September 2014- jam 11.15)
2. *http//www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cramer.html* (Tanggal unduh 15 September 2014- jam 21.11)
3. *http//wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler* (Tanggal unduh 11 September 2014- jam 11.25)
4. *http//www.wikipedia.org* (Tanggal unduh 11 Oktober 2014- jam 01.35)
5. *http://bacabiografi.blogspot.com/2011/05/biografi-al-khawarizmi-ilmuan-muslim.html* (Tanggal unduh 11 Oktober 2014- jam 01.45)
5. *http//www.Perludiketahui.wordpress.com* (Tanggal unduh 02 November 2014- jam 15.55)
6. *http://goth-id.blogspot.com/2012/04/transpirasi.html* (Tanggal unduh 11 Oktober 2014- jam 01.35)
7. *http://www.thefamouspeople.com/profiles/bernhard-riemann-biography-440.php* (Tanggal unduh 09 September 2014- jam 09.45)

Glosarium

Aproksimasi	: penghampiran
Bidang Diagonal	: bidang yang dibatasi oleh dua rusuk dan dua diagonal bidang suatu bangun ruang
Bidang Diagonal Balok	: bidang yang dibatasi oleh dua rusuk dan dua diagonal bidang pada balok
Bidang Diagonal Kubus	: bidang yang dibatasi oleh dua rusuk dan dua diagonal bidang pada kubus
Bidang diagonal prisma atau limas	: bidang yang dibatasi oleh dua diagonal bidang (bidang alas dan bidang atas) yang sejajar dan sama panjang, serta dua rusuk tegak yang sejajar atau bidang yang dibatasi oleh diagonal bidang alas dan dua rusuk bidang tegak
Bidang Diagonal Prisma Segitiga	: bidang yang dibatasi oleh dua diagonal bidang tegak yang saling berpotongan dan satu rusuk diagonal bidang (bidang alas atau bidang atas)
Bunga Majemuk	: bunga (uang) yang dibayarkan berdasarkan modal dan akumulasi bunga periode-periode sebelumnya.
Bunga Tunggal	: bunga (uang) yang dibayarkan hanya berdasarkan modal yang disimpan atau dipinjam
Diagonal Ruang	: ruas garis yang menghubungkan dua titik sudut yang berhadapan dalam suatu ruang,
Diagonal Sisi/bidang	: ruas garis yang menghubungkan dua titik sudut (bidang) yang berhadapan pada setiap bidang atau sisi

Fungsi	: aturan yang memasangkan setiap unsur didomain ke tepat satu unsur di kodomain
Integral Tentu	: suatu bilangan yang besarnya ditentukan dengan mengambil limit penjumlahan Riemann, yang diasosiasikan dengan partisi interval tertutup yang norma partisinya mendekati nol
Interval	: batasan untuk suatu variabel
Invers	: lawan atau kebalikan
Invers Matriks	: matriks kebalikan dari suatu matriks persegi
Jumlah Riemann	: jumlah luas-luas persegipanjang pada setiap partisi
Kesamaan Matriks	: matriks-matriks dengan ordo sama dan elemen-elemen yang seletak dari matriks-matriks tersebut sama
Konstanta	: representasi matematika yang berisi bilangan, variabel, atau simbol operasi yang tidak berubah nilainya
Koordinat Kartesius	: Sistem untuk menyatakan posisi suatu titik pada sebuah bidang grafik
Matriks	: susunan bilangan yang terdiri dari baris dan kolom
Matriks Identitas	: matriks persegi yang semua unsur diagonalnya sama dengan 1, dan semua unsur yang lain sama dengan nol
Matriks persegi	: matriks dengan banyak baris sama dengan banyak kolom
Ordo matriks	: ukuran matriks, banyaknya baris dan kolom suatu matriks

Partisi (subinterval)	: bagian dari interval
Persegipanjang	: Suatu segi empat yang mempunyai empat sudut siku-siku
Relasi	: memasangkan anggota himpunan satu ke himpunan lain
Sigma	: jumlah dari bilangan-bilangan
Suku Bunga	: prosentase dari modal yang dibayarkan beberapa kali dalam periode tertentu (biasanya per tahun)
Teorema	: pernyataan yang harus dibuktikan kebenarannya
Transpose matriks	: matriks yang diperoleh dengan menukar baris menjadi kolom dan sebaliknya.